

---

Université  
de Liège



# *1, 2, 3...Sciences*

*Année académique 2014-2015*

---

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES  
EXERCICES RÉCAPITULATIFS

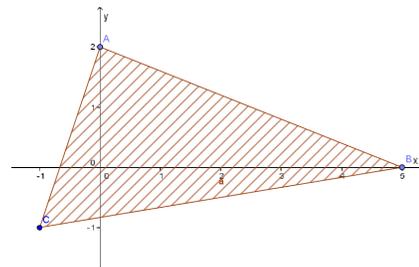
---

**Exercices divers**

- Résoudre les équations et inéquations suivantes (pour (c) et (d), on suppose que  $x \in [\pi, 3\pi]$ )
  - $3x|x-2| = x-2$
  - $\frac{|1-x|}{x^2-1} \geq x-1$
  - $\cos(3x) - \sin(x) = 0$
  - $\sin(2x) \leq \sin(x)$
- Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes :
  - $\cos(\ln(e^{-2\pi/3})) + \sin(\operatorname{tg}(3\pi/4))$
  - $\arcsin(1 - \cos(7\pi/6)) + \arccos(\cos(4\pi/3))$
- Dans un repère orthonormé, on donne les points  $A, B, C$  dont les coordonnées sont  $A(-1, 0, 3)$ ,  $B(1, 2, -1)$  et  $C(4, 1, 2)$ . Calculer
  - $3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
  - les composantes de  $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}$
  - les composantes de la projection orthogonale de  $\overrightarrow{AC}$  sur  $\overrightarrow{BC}$ .
- Si elles existent, déterminer les limites suivantes
  - $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(2x+3)}{x+1}$
  - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|1+x|}{\sqrt{1-x^2}}$
  - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^3-1}{-2x}\right)$
  - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp(-3x)-1}{2x}$
  - $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(-5x-1) - \ln|ex|)$
  - $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 1}$
- Démontrer par récurrence que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^n} = +\infty$  avec  $a > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ .  
En déduire que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n e^{ax}) = 0$ .  
On résume ces 2 propriétés en disant que “à l’infini, la fonction exponentielle domine toute puissance antagoniste de  $x$ ”.
- Où la fonction  $x \mapsto \arcsin(\sqrt{1-x^2})$  est-elle définie? dérivable? En déterminer la dérivée première.
- Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.
  - $\int_{-2}^{-1} \frac{\ln(-3x)}{x} dx$
  - $\int_{-\infty}^0 xe^{3x} dx$
  - $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{2-x} dx$
  - $\int_{-4}^4 \sqrt{x^2} dx$
  - $\int_4^5 \frac{2}{x(x^2-6x+9)} dx$
- Résoudre les équations suivantes dans  $\mathbb{C}$ .
  - $x^2 + 2 = -ix$
  - $27 + x^3 = 0$
- Représenter dans un repère orthonormé l’ensemble dont une description analytique est la suivante
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \geq x^2 \geq 1 - 9y^2\}.$$

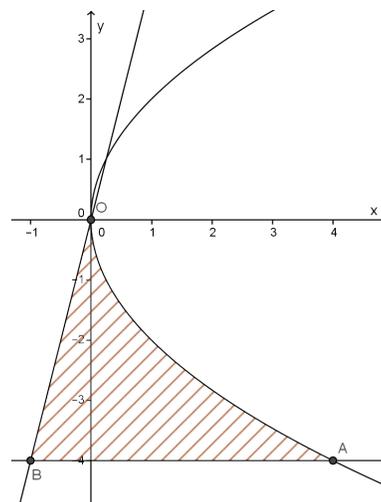
10. Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré suivant

- (1) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
- (2) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.



11. Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré suivant

- (1) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
- (2) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.



12. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes ( $f$  est la fonction inconnue)

$$a) D^2 f(x) + f(x) = e^{ix} \quad b) 9D^2 f(x) + 6Df(x) + f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

### Problèmes élémentaires

1. La distance de freinage (en mètres) d'une voiture roulant à  $v$  km/h sur sol sec est donnée par
  - (a)  $\left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{2}$  si cette voiture est équipée de freins normaux
  - (b)  $v$  si cette voiture est équipée de freins ABS spéciaux.
 Déterminer les vitesses pour lesquelles la voiture équipée de freins ABS est plus performante quant à la distance de freinage.
2. Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il obtient 53,75 points comme cote finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?

### Maths en sciences

1. La pression de la vapeur d'eau saturée dépend de la température suivant une loi de la forme  $p = aT^2 + bT + c$  ( $a, b, c$  étant réels). Nous disposons des valeurs suivantes :

T (C)	0	10	20
p (Torr)	4.6	9.2	17.5

Calculer les coefficients  $a, b$  et  $c$ .

2. Il a été prouvé expérimentalement que le radium se désintègre au cours du temps en obéissant à la formule  $m(t) = m_0 e^{-0,000436 t}$ , où  $m_0$  représente la masse initiale du radium et  $m(t)$  sa masse après  $t$  années. Calculer la "période de désintégration" du radium, c'est-à-dire le laps de temps pendant lequel se désintègre la moitié de la masse initiale (N.B. :  $\ln 2 \approx 0,7$ ).

3. Un point matériel se déplace à la vitesse  $v = 2t + 4$  cm/s. Calculer la distance parcourue après les 10 premières secondes si le temps  $t$  est exprimé en secondes.
4. En physique, le travail exercé par une force  $F$  pour déplacer un point matériel d'un point  $P_1$ , situé à une distance  $d_1$  de son point d'application, à un point  $P_2$ , situé à une distance  $d_2$  de son point d'application, est donné par l'intégrale suivante :

$$W = \int_{d_1}^{d_2} F(x)dx.$$

Fort de ce constat, soient deux charges électrique  $e_1 = 1$  et  $e_2 = e$ , distantes entre elles de  $x$ . La loi de Coulomb affirme que la charge  $e$  agit sur la charge unité avec une force de valeur absolue égale à  $\frac{e}{x^2}$ . Calculer le travail  $W$  de cette force lorsque la charge unité se déplace d'un point  $P_1$  situé à la distance  $r$  de cette charge  $e$  jusqu'à un autre point  $P_2$  où l'éloignement devient égal à  $R$ . En déduire le potentiel de la charge  $e$  au point  $P_1$  (sachant que le potentiel est égal à la limite du travail  $W$  lorsque  $R$  tend vers  $+\infty$ ).

5. Soit un ressort à boudin qui s'allonge de 1 mm pour un effort de traction de 30 N. Calculer le travail qu'il faut développer pour allonger le ressort de 20 mm, sachant que la force de traction est à chaque instant proportionnelle au déplacement.

### QCM

1. Le carré d'un nombre complexe est toujours
  - (a) un nombre positif
  - (b) un nombre négatif
  - (c) un nombre imaginaire pur
  - (d) aucune réponse correcte
2. La partie réelle du produit de deux nombres complexes est toujours égale
  - (a) au produit des parties réelles de ces nombres
  - (b) à la somme des parties réelles de ces nombres
  - (c) à la somme de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre
  - (d) au produit de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre
  - (e) aucune réponse correcte
3. La valeur absolue de la somme de deux réels est toujours
  - (a) inférieure ou égale à la différence entre les valeurs absolues de ces réels
  - (b) inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ces réels
  - (c) supérieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ces réels
  - (d) supérieure ou égale à la moitié du produit de ces réels
  - (e) aucune réponse correcte
4. Si  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , le graphique de  $F(x) = f(-x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  est
  - (a) le symétrique du graphique de  $f$  par rapport à la première bissectrice
  - (b) le symétrique du graphique de  $f$  par rapport à l'axe  $X$
  - (c) le symétrique du graphique de  $f$  par rapport à l'axe  $Y$
  - (d) le symétrique du graphique de  $f$  par rapport à l'origine
  - (e) aucune réponse correcte
5. L'ensemble des solutions de l'inéquation  $|x|^3 < |x|^2$  est l'ensemble
  - (a)  $[-1, 1[$
  - (b)  $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$
  - (c)  $] - 1, 1[\setminus \{0\}$
  - (d)  $] - \infty, -1[$
  - (e) aucune réponse correcte

6. Dans le plan muni d'un repère, une droite a toujours une équation cartésienne du type  $y = mx + p$ 
  - (a) vrai
  - (b) faux
7. Le cube d'un réel non nul et de son opposé sont toujours égaux
  - (a) vrai
  - (b) faux
8. Etant donné deux vecteurs non nuls, tout autre vecteur du plan peut se décomposer de manière unique comme combinaison linéaire de ceux-ci.
  - (a) vrai
  - (b) faux
9. Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante
  - (a) vrai
  - (b) faux
10. Le domaine de définition de la fonction donnée par  $\cos(\cos x)$  est l'intervalle  $[-1,1]$ 
  - (a) vrai
  - (b) faux