1, 2, 3...Sciences

Année académique 2014-2015

Mathématique et physique : 1er bachelier

Test du 15-09-14

Correction

Problèmes élémentaires

Rédiger une solution des problèmes simples suivants.
Mathématique :
1) Lors d'un orage, on a récolté 120 litres d'eau de pluie dans une citerne parallélépipédique dont la base est un carré de 2 m **de côté. De combien de** mm **le niveau de l'eau s'est-il élevé dans la citerne ?**

Solution. Puisque 1 litre correspond à un volume de 1 dm^3, les 120 litres récoltés correspondent à 120 dm^3. Le volume d'un parallélépipède est le produit de l'aire de sa base par sa hauteur et l'aire de la base carrée de la citerne vaut $2^2 = 4\,m^2 = 400\,dm^2$. Dès lors, le niveau de l'eau dans la citerne s'élève de $120 : 400 = 0,3\,dm = 30\,mm$.

2) Si le réel exprimant l'aire d'un disque évaluée en dm^2 **est égal au réel exprimant son périmètre évalué en** m**, que vaut la longueur du rayon de ce disque en centimètre ?**

Solution. Soit $x > 0$ la longueur en centimètres du rayon du disque.
L'aire du disque évaluée en dm^2 vaut $\pi\ 10^{-2}\ x^2$ et le périmètre évalué en m vaut $2\pi\,10^{-2}\,x$.
Puisque le réel exprimant l'aire en dm^2 est égal au réel exprimant son périmètre en m, on a l'égalité

$$\pi\ 10^{-2}\ x^2 = 2\pi\,10^{-2}\,x \Leftrightarrow x^2 = 2x \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

Dès lors, la longueur du rayon du disque vaut $2\,cm$.

Physique :
Un oiseau vole horizontalement vers le nord à $20\,\mathrm{m/s}$ **pendant** $15\,\mathrm{s}$**. Il se repose pendant** $5\,\mathrm{s}$ **puis vole vers le sud à** $25\,\mathrm{m/s}$ **pendant** $10\,\mathrm{s}$**. Déterminez, pour la totalité du voyage en tenant compte du temps de repos, la vitesse moyenne de l'oiseau.**

Solution. La distance totale parcourue est $20\ .\ 15 + 25\ .\ 10\ = 300 + 250 = 550$ m et le temps mis pour la totalité du voyage est égal à $15 + 5 + 10 = 30$ s. Dès lors, la vitesse moyenne de l'oiseau est de $550 : 30 = 18,33\ldots$ m/s.

Transcodage

1. **Exprimer en français la propriété ci-dessous (ATTENTION : ne pas se limiter à une lecture de symboles. Par exemple, on exprime ≪ $a + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ ≫ par ≪ la somme de deux réels ≫ et non ≪ a plus b avec a, b appartenant à $\mathbb{R}$ ≫) :**

   $$x^2 \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$$

   Solution. Le carré d'un réel est un réel positif (ou nul).

2. **Exprimer en symboles mathématiques la phrase entre guillemets :**
   ≪ Si une tige homogène de longueur donnée, tenue horizontalement en une de ses extrémités, pivote sans frottement jusqu'à atteindre une position verticale en étant partie du repos alors sa vitesse angulaire à la verticale est donnée par la racine carrée du quotient du triple de l'accélération due à la pesanteur par la longueur de la tige. ≫

   Solution. Soit L la longueur d'une tige homogène tenue horizontalement en une de ses extrémités qui pivote sans frottement en étant partie du repos. Si v est sa vitesse angulaire à la verticale et g l'accélération due à la pesanteur alors on a

   $$v = \sqrt{\frac{3g}{L}}.$$

Techniques de calcul

1. **Résoudre (x est une inconnue réelle)**

(a) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{5}=\dfrac{7x}{30}$ (b) $x^2=2x+5$ (c) $4-x<\dfrac{4}{x}$

Solution.

1. (a) On a

$$\frac{x}{3}+\frac{3}{5}=\frac{7x}{30}\Leftrightarrow\frac{10x+18}{30}=\frac{7x}{30}\Leftrightarrow 3x=-18.$$

Dès lors, en divisant les deux membres par 3, on obtient $x=-6$ et l'ensemble des solutions est l'ensemble $S=\{-6\}$.

(b) L'équation donnée est équivalente à $x^2-2x-5=0$. Comme son discriminant vaut $\Delta=(-2)^2-4.1.(-5)=24$, les solutions sont $\dfrac{2-2\sqrt{6}}{2}=1-\sqrt{6}$ et $\dfrac{2+2\sqrt{6}}{2}=1+\sqrt{6}$.
Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S=\left\{1-\sqrt{6},\ 1+\sqrt{6}\right\}$.

(c) Si $x\neq 0$, l'inéquation donnée est équivalente à $\dfrac{4-4x+x^2}{x}>0\Leftrightarrow\dfrac{(2-x)^2}{x}>0$. En étudiant le signe du premier membre, comme $(2-x)^2>0$ si $x\neq 2$, on a $x\in\,]0,2[$ ou $x\in\,]2,+\infty[$.
Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S=\,]0,2[\,\cup\,]2,+\infty[$.

2. **Résoudre (x est une inconnue réelle)** $2\cos(2x)=\sqrt{3}$ **et donner les solutions qui appartiennent à $[0,\pi]$.**

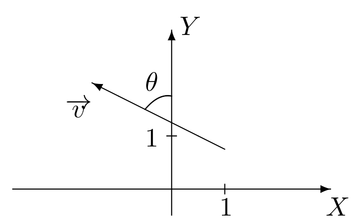
Solution. L'équation donnée est équivalente à $\cos(2x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos(2x)=\cos\dfrac{\pi}{6}$ qui a pour solutions

$$\left(2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \text{ ou } 2x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow\left(x=\frac{\pi}{12}+k\pi\ \text{ ou } x=-\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right).$$

L'ensemble des solutions dans $[0,\pi]$ est alors $S=\left\{\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{11\pi}{12}\right\}$.

Représentation graphique

1. **Dans un repère orthonormé du plan, on donne le vecteur libre $\overrightarrow{v}$ par la représentation ci-contre. On suppose que la mesure de l'angle entre ce vecteur et le vecteur de base de l'axe Y est $\theta\in[0,\pi]$ et que la longueur du vecteur (c'est-à-dire sa norme) est égale à $r>0$. Dans ce cas, en utilisant les données et les notations de l'énoncé, que vaut la première composante du vecteur $\overrightarrow{v}$?**



Solution. Avec les notations de l'énoncé, la première composante du vecteur $\overrightarrow{v}$ est $-r\sin(\theta)$.

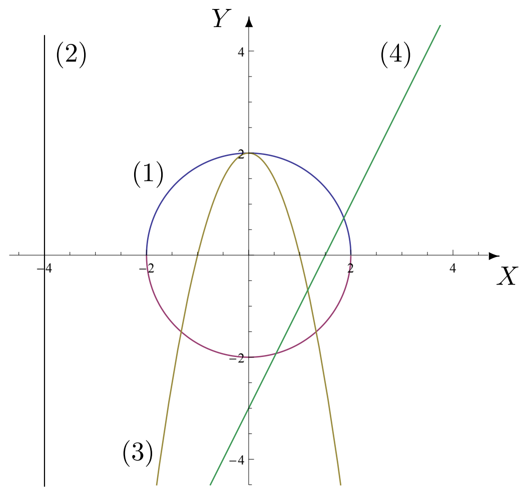
2. **Dans un même repère orthonormé, représenter avec précision les courbes dont voici des équations cartésiennes. Accompagner le graphique du numéro de l'équation.**

(1) $x^2 + y^2 = 4$

(2) $x + 4 = 0$

(3) $2x^2 + y - 2 = 0$

(4) $2x - y - 3 = 0$



$\boxed{\textbf{QCM}}$ (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède.

1. Si on colorie $\frac{2}{5}$ de la surface d'un losange, puis qu'on colorie $\frac{1}{6}$ de la surface non coloriée de ce même losange, alors la fraction de la surface du losange coloriée est
   ☐ $\frac{1}{15}$ ☐ $\frac{1}{7}$ ♣ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{17}{30}$ ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte
2. L'audience d'une émission de télévision a diminué de 20 % par rapport à la semaine dernière. Cela signifie que, pour connaître l'audience de l'émission de la semaine dernière, l'audience actuelle doit être
   ☐ multipliée par 0,8 ☐ multipliée par 1,2 ♣ multipliée par 1,25
   ☐ divisée par 1,2 ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte
3. Si on désire calculer le rayon d'un disque dont l'aire vaut la moitié de l'aire d'un disque donné D, il faut
   ☐ diviser le rayon de D par 2 ☐ diviser le rayon de D par 4
   ☐ multiplier le rayon de D par $\sqrt{2}$ ☐ multiplier le rayon de D par $\frac{2}{\pi}$
   ♣ aucune des propositions précédentes n'est correcte
4. Si on lâche une pierre d'une hauteur $h > 0$, la vitesse au sol de la pierre v_s est donnée par la formule suivante
   $$v_s = \sqrt{2gh}$$
   où g est l'accélération due à la pesanteur. Pour que la vitesse au sol de la pierre soit doublée, la hauteur h doit être
   ☐ multipliée par $\sqrt{2}$ ☐ multipliée par 2 ♣ multipliée par 4
   ☐ multipliée par $\sqrt{\frac{2}{g}}$ ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte
5. Soit un mobile se déplaçant sur une droite. Le graphique ci-dessous représente la position x de ce mobile en fonction du temps t. Si a et b sont deux constantes réelles strictement positives, laquelle des expressions données décrit le mieux la vitesse v du mobile en fonction du temps ?
   ☐ $v(t) = -a$
   ☐ $v(t) = -at - b$
   ♣ $v(t) = -at + b$
   ☐ $v(t) = at + b$
   ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte