ANALYSE III, 2015-2015, 2e bloc ingénieur civil
Examen du 04 janvier 2016— Solutions (résumé)
Version : 26 janvier 2016 (V1 : 25/01/16)

THEORIE

Théorie 1

1.1) **Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Enoncer ce que l'on appelle ≪ formule de représentation intégrale de Cauchy pour f et ses dérivées ≫. Les hypothèses de validité et les notations employées doivent être clairement exprimées.**

1.2) Enoncer et démontrer le résultat donnant le développement en série de puissances d'une fonction holomorphe dans un ouvert de $\mathbb{C}$ (développement de Taylor). Les hypothèses de validité et les notations employées doivent être clairement exprimées.

Solution (résumé). Tout cela a été abondamment expliqué au cours et figure dans le syllabus (à noter que la preuve faite pour 1.2) au cours est nettement plus naturelle que celle qui figure dans le syllabus).

Théorie 2

2.1) **Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace de Hilbert H, en précisant bien la signification des notations employées.**

2.2) Ensuite, en guise d'application, l'énoncer dans l'espace $H = L^2([0,1])$ (qui est aussi à définir), en utilisant les expressions explicites des produit scalaire et norme dans cet espace.

Solution. Cf cours.

EXERCICES

Exercice 1 Déterminer la transformée de Fourier ($-$) de la fonction suivante (en explicitant les calculs y conduisant)

$$f(x) = e^{-3|x|},\ x \in \mathbb{R}$$

En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{9+x^2} dx$$

Solution (résumé). Tout d'abord, remarquons que comme la fonction donnée est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = 0$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$. Cela étant, on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^- f = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} e^{-3|x|} dx &= 2\int_0^{+\infty} \cos(xy) e^{-3x} dx \\
&= 2\mathcal{R} \int_0^{+\infty} e^{-x(3+iy)} dx \\
&= 2\mathcal{R}\left(\frac{1}{3+iy}\right) \\
&= \frac{6}{9+y^2}
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{9+x^2} dx = \frac{1}{12}\mathcal{F}_2^+\mathcal{F}^- f = \frac{\pi}{6} f(2) = \frac{\pi}{6} e^{-6}$$

car f est continu en le réel 2.

Exercice 2 Dans un repère orthonormé du plan, on donne la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique

$$[t - \sin(t), 1 - \cos(t)], \quad t \in [0, 4\pi]$$

En déterminer la longueur.

Solution. Cet exercice faisait partie du TD de décembre 2015 (sauf pour l'intervalle).

Exercice 3

3.1) **Soit γ le paramétrage classique injectif de la circonférence centrée en i, de rayon 1 et orientée dans le sens trigonométrique. Déterminer la valeur des intégrales suivantes**

$$\int_\gamma z dz, \quad \int_\gamma \overline{z} dz, \quad \int_\gamma \frac{1}{z-i} dz, \quad \int_\gamma \frac{1}{(z-i)^2} dz$$

3.2) **On donne les fonctions f et g par**

$$f(z) = \frac{\sin(iz)}{z^3}, \quad g(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$$

a) Où ces fonctions sont-elles holomorphes ?
b) Quels sont leurs zéros ? Quelles en sont les multiplicités respectives ?
c) Quelles sont les singularités isolées ? De quels types sont-elles ?
d) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.
e) Pour f, déterminer le développement de Laurent en chacune des singularités isolées et préciser quelles sont les fonctions « h » et « H ».

3.3) **Déterminer la valeur de l'intégrale suivante en utilisant la technique des fonctions holomorphes.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{16x^4+9}\, dx$$

Solution. Cf janvier 2013.

Exercice 4

4.1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0,2\pi])$ de la fonction f donnée par $f(x) = x$. Simplifier au maximum l'expression obtenue pour que le développement ne contienne plus que des fonctions sinus et cosinus.

4.2) En déduire la valeur de la somme

$$S = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$$

Solution (résumé). On peut utiliser la suite orthonormée totale $e_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}$ ($m \in \mathbb{Z}$). En calculant les coefficients $< f, e_m >$ pour toutes les valeurs de l'entier m et en repassant aux fonctions sinus et cosinus, on trouve

$$x = \pi - 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(mx)}{m}.$$

En utilisant « Pythagore » généralisé, à savoir

$$\|f\|^2_{L^2([0,2\pi])} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |< f, e_m >|^2$$

on obtient

$$S = \frac{\pi^2}{6}.$$

<u>Exercice 5</u> Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

5.1) La fonction $z \mapsto \exp(i|z|)$ est bornée dans $\mathbb{C}$.

5.2) Il existe une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier est une constante non nulle.

5.3) Il existe une fonction (non identiquement nulle) de carré intégrable sur $[-1,1]$ qui est orthogonale (dans $L^2([-1,1])$) à sa conjuguée.

Solution.
5.1) Vrai car comme $|z|$ est réel quel que soit le complexe z, le module de la valeur de la fonction en tout point est toujours égal à 1.
5.2) Faux car la transformée de Fourier d'une fonction intégrable est une fonction dont la limite en l'infini est nulle.
5.3) Vrai. Par exemple la fonction $f : x \mapsto e^{i\pi x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc de carré intégrable sur tout intervalle fermé borné et on a $< f, \bar{f} >= \int_{-1}^{1} e^{2i\pi x} dx = 0$.