Analyse III, 2e bachelier Ingénieur civil, 2016-2017

Examen de la session d'août-septembre–Solutions (résumé)
Version : 12 septembre 2017 (V1 : 12/09/17)

THEORIE

Théorie 1

1.1) **Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Enoncer ce que l'on appelle ≪ formule de représentation intégrale de Cauchy pour f et ses dérivées ≫. Les hypothèses de validité et les notations employées doivent être clairement exprimées.**

1.2) **Enoncer et démontrer le résultat donnant le développement en série de puissances d'une fonction holomorphe dans un ouvert de $\mathbb{C}$ (développement de Taylor). Les hypothèses de validité et les notations employées doivent être clairement exprimées.**

Théorie 2

2.1) **Donner la définition de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable dans $\mathbb{R}$.**

2.2) **Enoncer ensuite le théorème de Fourier pour une fonction intégrable dans $\mathbb{R}$ en exprimant toutes les transformées de Fourier explicitement (c'est-à-dire sous forme d'intégrale, en repassant à la définition).**

Solution. Tout cela a été abondamment expliqué au cours et figure dans le syllabus. (A noter que la preuve faite pour 1.2) au cours est nettement plus naturelle que celle qui figure dans le syllabus).

La question 1) a (notamment) été posée en janvier 2016 et la question 2) en août 2016.

Les deux questions sont exactement celles posées en janvier 2017.

EXERCICES

Exercice 1

Soient les réels strictement positifs a, b. En utilisant le théorème de dérivation des intégrales paramétriques, calculer

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x}\, dx.$$

Solution. Cet exercice a été posé en août 2016 et a été traité lors d'une séance de répétition.

Exercice 2

On donne les fonctions F et f définies par

$$F(z) = \frac{iz-1}{z^3 - i}, \quad f(z) = z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$$

(a) Où ces fonctions sont-elles holomorphes ?
(b) Quels sont leurs zéros ? Quelles en sont les multiplicités respectives ?
(c) Quelles sont leurs singularités isolées ? De quels types sont-elles ?
(d) Déterminer le résidu de f en chacune de ses singularités isolées.
(e) Déterminer le développement de Laurent de f en chacune de ses singularités isolées. (Sous forme de série et aussi en précisant les fonctions ≪ classiques ≫ h et H.)
(f) Calculer $\int_\Gamma f(z)\, dz$ lorsque Γ est le bord du carré centré à l'origine, de mesure de côté égale à 2, et dont les côtés sont parallèles aux axes (orientation : ≪ aire à gauche ≫).

Solution. Cet exercice a été posé en janvier 2015.

<u>Exercice 3</u>
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (1 - x^2)\ \chi_{[-1,1]}(x)$$

(a) Si possible, déterminer la transformée de Fourier ($-$) de f.
(b) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}\ dx$$

Solution. Cet exercice a été posé en janvier 2015.

<u>Exercice 4</u>
(a) Développer la fonction $x \mapsto \sin^2(x)$ en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0, \pi])$. Préciser quelle base vous utilisez.
(b) Dans $L^2([-\pi, \pi])$, on donne le développement suivant

$$x^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(mx)$$

où les a_m $(m \in \mathbb{N})$ sont des réels. Que vaut le coefficient a_3 ?

Solution. Cet exercice a été posé en janvier 2015.

<u>Exercice 5</u> Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
(a) La fonction $z \mapsto \exp(iz)$ est bornée dans $\mathbb{C}$

(b) Il existe une fonction intégrable f dont la transformée de Fourier (-) est la fonction $y \mapsto \dfrac{y^2}{y^2+1}$.

Solution. Cet exercice a été posé en janvier 2015.