Analyse III, 2e bachelier Ingénieur civil, 2016-2017

Examen de la session de janvier 2017–Solutions (résumé)
Version : 10 février 2017 (V1 : 08/02/17)

THEORIE

Théorie 1

1.1) **Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Enoncer ce que l'on appelle ≪ formule de représentation intégrale de Cauchy pour f et ses dérivées ≫. Les hypothèses de validité et les notations employées doivent être clairement exprimées.**

1.2) **Enoncer et démontrer le résultat donnant le développement en série de puissances d'une fonction holomorphe dans un ouvert de $\mathbb{C}$ (développement de Taylor). Les hypothèses de validité et les notations employées doivent être clairement exprimées.**

Théorie 2

2.1) **Donner la définition de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable dans $\mathbb{R}$.**

2.2) **Enoncer ensuite le théorème de Fourier pour une fonction intégrable dans $\mathbb{R}$ en exprimant toutes les transformées de Fourier explicitement (c'est-à-dire sous forme d'intégrale, en repassant à la définition).**

Solution. Tout cela a été abondamment expliqué au cours et figure dans le syllabus. (A noter que la preuve faite pour 1.2) au cours est nettement plus naturelle que celle qui figure dans le syllabus).

La question 1) a (notamment) été posée en janvier 2016 et la question 2) en août 2016.

EXERCICES

Exercice 1 Déterminer les transformées de Fourier $(-,+)$ des fonctions f et g définies par (en explicitant les calculs y conduisant)

$$f = \chi_{[-1,1]}, \qquad g(x) = e^{-|x|}$$

En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x(1+x^2)}dx$$

Solution (résumé). Les fonctions données sont intégrables dans $\mathbb{R}$ (voir [8]).

Un calcul immédiat conduit à

$$(\mathcal{F}^{\pm} f)(x) = \begin{cases} 2\dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{F}^{\pm} g)(x) = \frac{2}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

Cela étant, comme la transformée de Fourier de g est une fonction intégrable dans $\mathbb{R}$, une application du théorème de transfert, du théorème de Fourier puis un calcul direct conduisent à

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x(1+x^2)}dx \;=\; \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}^{+} f)(x)\ (\mathcal{F}^{-} g)(x)\ dx \;=\; \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\ dx \;=\; \pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

8. justification pour la fonction f : c'est une constante sur un intervalle borné fermé, nulle en dehors ; justification pour la fonction g : elle est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 à l'infini après multiplication par x^2

<u>Exercice 2</u> **On définit la fonction I par**

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a}dx, \qquad a>0.$$

En utilisant le théorème de dérivation des intégrales paramétriques pour dériver I, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a)^2}dx \;=\; \frac{\pi}{4a^{3/2}}, \qquad a>0.$$

Solution (résumé). Pour tout $a>0$, posons

$$f_a(x) = \frac{1}{x^2+a},\ x \geq 0$$

Quel que soit $a>0$, cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to\infty} x^2 f_a(x) = 1$; elle est donc intégrable dans $\mathbb{R}$. De plus, comme on a

$$f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} D_x \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right),\ x\geq 0$$

on en déduit que

$$I(a) = \frac{\pi}{2\sqrt{a}},\ a>0.$$

Dès lors I est dérivable en tout $a>0$ et on a

$$DI(a) = -\frac{\pi}{4a^{3/2}},\ a>0.$$

Cela étant, posons $A=[0,+\infty[$ et $\Lambda =]0,+\infty[$. On a les propriétés suivantes :
- $x \mapsto f_a(x)$ est intégrable dans A (cf ci-dessus)
- $a \mapsto f_a(x)$ est continûment dérivable dans Λ
- on a

$$D_a f_a(x) = -\frac{1}{(x^2+a)^2},\ a\in\Lambda$$

- si $r>0$ on a aussi

$$|D_a f_a(x)| = \frac{1}{(x^2+a)^2} \leq \frac{1}{(x^2+r)^2},\ \forall a\geq r, x\geq 0$$

où la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+r)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (voir [9]). Le théorème de dérivation des intégrales paramétriques permet donc de permuter dérivation et intégration et on obtient

$$DI(a) = -\frac{\pi}{4a^{3/2}} = \int_0^{+\infty} D_a f_a(x)\ dx \;=\; -\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a)^2}dx,\ a>0$$

et dès lors

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a)^2}dx \;=\; \frac{\pi}{4a^{3/2}}, \qquad a>0.$$

<u>Exercice 3</u> **Soit γ le paramétrage classique injectif de la circonférence centrée en $1+i$, de rayon 2 et orientée dans le sens trigonométrique. Déterminer la valeur des intégrales suivantes**

$$\int_\gamma \mathcal{R}z\ dz, \quad \int_\gamma \frac{1}{z+i}dz, \quad \int_\gamma \frac{1}{z-i}dz, \quad \int_\gamma \frac{1}{(z-i)^2}dz$$

Solution (résumé). (Cf examen du mois d'août 2016.)

On a $\gamma(t) = 1+i+2e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$.

• Première intégrale : en appliquant la définition des intégrales curvilignes, on obtient

$$\int_\gamma \mathcal{R}z\ dz = 2i\int_0^{2\pi}\big(1+2\cos(t)\big)\,e^{it}dt = 2i\int_0^{2\pi}(1+e^{it}+e^{-it})e^{it}\ dt = 2i\int_0^{2\pi}(e^{it}+e^{2it}+1)\ dt \;=\; 2i\int_0^{2\pi}dt = 4i\pi$$

9. elle est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 à l'infini après multiplication par x^2

• Seconde intégrale : la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z+i}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ et γ ne « tourne pas autour » de $-i$; dès lors l'intégrale est nulle car il s'agit de l'intégrale d'une fonction holomorphe dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ sur un chemin fermé homotope à un chemin constant dans l'ouvert Ω.
• Troisième et quatrième intégrales : comme γ « tourne une fois autour de i dans le sens trigonométrique », la représentation intégrale de Cauchy pour $f(z) = 1$ ($z \in \mathbb{C}$) et sa dérivée donne directement

$$\int_\gamma \frac{1}{z-i}dz = 2i\pi, \quad \int_\gamma \frac{1}{(z-i)^2}dz = 0.$$

On peut bien sûr procéder de plusieurs autres manières (directement ou par résidus).

Exercice 4 Soient les fonctions f et g définies par

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}, \quad g(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$$

4.1) Où ces fonctions sont-elles holomorphes ?

4.2) Quels sont leurs zéros ? Quelles en sont les multiplicités respectives ?

4.3) Quelles sont les singularités isolées ? De quels types sont-elles ?

4.4) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.

4.5) Pour f, déterminer le développement en série de Laurent en chacune des singularités isolées. Préciser également les fonctions classiques « h et H ».

Solution. Cf examen du mois d'août 2016, 2012, janvier 2014.

Exercice 5

5.1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0, 2\pi])$ de la fonction f donnée par $f(x) = x$. Simplifier au maximum l'expression obtenue pour que le développement ne contienne plus que des fonctions sinus et cosinus.

5.2) En déduire la valeur de la somme

$$S = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$$

Solution. Cf examen du mois de janvier 2016.

De plus, l'exercice a été fait au dernier cours de décembre pour la fonction $f: x \mapsto \frac{\pi-x}{2}$; les calculs sont donc très très proches de ce qui a été fait en classe.

Exercice 6 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

6.1) La fonction $z \mapsto \exp(-iz)$ est bornée dans $\mathbb{C}$.

6.2) Il existe une fonction (non identiquement nulle) de carré intégrable sur $[-1, 1]$ qui est orthogonale (dans $L^2([-1, 1])$) à sa conjuguée.

Solution. Cf examen du mois de janvier 2016.