Analyse II Corrigé succinct du TD du 27 octobre 2015

Exercice 1. 1.1) L'équation cartésienne de la courbe peut se réécrire $(x+1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. Il s'agit donc d'une ellipse de centre $(-1, 0)$ dont la longueur du « demi-grand axe » (parallèle à l'axe Y) est égale à 2 et celle du « demi-petit axe » (parallèle à l'axe X) est égale à 1. Un paramétrage de la courbe est donné par

$$\vec{\gamma} : t \in [0, 2\pi] \mapsto [-1 + \cos(t), 2\sin(t)] \,.$$

En considérant l'orientation donnée par le paramétrage, la première intégrale devient

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y)\ dx = \int_0^{2\pi} [2\sin t \cos t, 0] \bullet [-\sin t, 2\cos t]\ dt = -\int_0^{2\pi} 2\sin^2 t \cos t\ dt = 0.$$

La deuxième intégrale est indépendante de l'orientation de la courbe. On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} f\ ds &= \int_0^{2\pi} 2\sin t \cos t \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t}\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sin(2t) \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos(2t)}\ dt \\
&= -\frac{2}{9}\int_0^{2\pi} D\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos(2t)\right)^{3/2}\ dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

1.2) Un paramétrage régulier de la courbe est donné par $\vec{\gamma} : x \in [0,1] \mapsto [x, \cosh x]$. Il s'ensuit que $D\vec{\gamma}(x) = [1, \sinh x]$ et $\|D\vec{\gamma}(x)\| = \sqrt{1 + \sinh^2 x} = \sqrt{\cosh^2 x} = \cosh x$ et que la longueur de la courbe est égale à

$$\int_0^1 \|D\vec{\gamma}(x)\|\ dx = \int_0^1 \cosh x\ dx = \sinh(1).$$

1.3) Si $x(t) = \sin(t)$ et $y(t) = \sin(2t)$ avec $t \in [0, \pi]$, alors $x(t) \geq 0$ et on vérifie aisément que $[y(t)]^2 + 4[x(t)]^4 - 4[x(t)]^2 = 0$, de sorte que le point $(x(t), y(t))$ appartient à Γ.
Inversement, tout point de la courbe peut être représenté grâce au paramétrage proposé. En effet, supposons que (x, y) appartienne à Γ. On a alors $0 \leq y^2 = 4x^2(1-x^2)$ donc $x^2 \leq 1$. Comme x est positif, on obtient plus précisément $x \in [0,1]$ et il existe donc $t \in [0, \pi]$ tel que $x = \sin(t)$. On obtient alors $y^2 = 4x^2(1-x^2) = 4\sin^2(t)\ \cos^2(t) = \sin^2(2t)$ donc

$$y = \sin(2t) \quad \text{ou} \quad y = -\sin(2t) = \sin(2(\pi - t)).$$

Dès lors, on a

$$x = \sin(t), \quad y = \sin(2t) \qquad \text{avec } t \in [0, \pi]$$

ou

$$x = \sin(t) = \sin(\pi - t), \quad y = -\sin(2t) = \sin(2(\pi - t)) \qquad \text{avec } \pi - t \in [0, \pi].$$

D'où la conclusion.

Ce paramétrage est injectif sur $]0, \pi[$ car, sur cet intervalle, les égalités $\sin(t_1) = \sin(t_2)$ et $\sin(2t_1) = \sin(2t_2)$ donnent $\cos(t_1) = \cos(t_2)$ donc $t_1 = t_2$. On notera toutefois que $\vec{\gamma}(0) = [0,0] = \vec{\gamma}(\pi)$: la courbe associée au paramétrage est fermée.
Il est évident que ce paramétrage est aussi continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$D_t\vec{\gamma}(t) = [\cos(t), 2\cos(2t)],\ \forall\, t \in\ [0, \pi].$$

Dès lors, comme la fonction vectorielle $\vec{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, l'intégrale curviligne a bien un sens (puisqu'il s'agit d'intégrer des fonctions continues sur le compact $[0,\pi]$) et on a

$$\int_{\Gamma^+} f_1 dx + f_2 dy = \int_0^{\pi} [\sin(t)+\sin(2t), -\sin(t)] \bullet [\cos(t), 2\cos(2t)] dt = \frac{8}{3}.$$

1.4) Voir le corrigé de l'examen de janvier 2015

Exercice 2. 2.1) On a

$$f(y)g(x-y) = e^{-ay}\chi_{]0,+\infty[}(y)e^{-b(x-y)}\chi_{]-\infty,x[}(y) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } x \leq 0 \\ e^{-bx}e^{(b-a)y}\chi_{]0,x[}(y) & , \quad \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Ainsi, cette fonction (de y) est intégrable sur $\mathbb{R}$ quel que soit le réel x et on a

$$(f * g)(x) = 0 \quad \text{si } x \leq 0$$

et

$$(f * g)(x) = e^{-bx}\int_{\mathbb{R}} e^{(b-a)y}\chi_{]0,x[}(y)\, dy = e^{-bx}\int_0^x e^{(b-a)y}\, dy = \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{b-a} \quad \text{si } x > 0.$$

Autrement dit,

$$(f * g)(x) = \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{b-a}\chi_{]0,+\infty[}(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

2.2) Posons $f_{a,b}(x) = \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$. Cette fonction est continue sur $]0,+\infty[$, $\lim_{x\to 0^+} f_{a,b}(x) = b-a$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 f_{a,b}(x) = 0$. Cela entraine son intégrabilité sur $]0,+\infty[$.

Méthode 1 : Transformer $1/x$ en une intégrale.

Remarquons que, $\forall x \in]0,+\infty[$, on a $\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt$. Par le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{f_{a,b}(x)}{b-a}\, dx &= \frac{1}{b-a}\int_0^{+\infty} (e^{-ax}-e^{-bx})\left(\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt\right) dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(e^{-(a+t)x}-e^{-(b+t)x}\right) dx\, dt \\ &= \frac{1}{b-a}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{a+t}+\frac{-1}{b+t}\right) dt \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\ln\left(\frac{a+t}{b+t}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

Méthode 2 : utiliser le théorème de dérivation des intégrales paramétriques.

Fixons $a > 0$ et considérons la fonction

$$I : b \in]0,+\infty[\mapsto \int_0^{+\infty} f_{a,b}(x)\, dx.$$

L'ensemble $\Lambda =]0,+\infty[$ dans lequel varie b est un ouvert de $\mathbb{R}$ et l'ensemble d'intégration $A =]0,+\infty[$ est mesurable. De plus,
(i) $\forall b \in \Lambda,\ (x \mapsto f_{a,b}(x)) \in L_1(A)$;
(ii) pour presque tout $x \in A$, $(b \mapsto f_{a,b}(x)) \in C_1(\Lambda)$;
(ii) $\forall\ K$ compact de Λ, $\exists\ r > 0$ tel que $K \subseteq [r,+\infty[$ et on a $|D_b f_{a,b}(x)| = e^{-bx} \leq e^{-rx} \quad \forall b \in K$, la fonction $x \mapsto e^{-rx}$ étant intégrable sur A.
Par le théorème de dérivation des intégrales paramétriques, on en déduit alors que $I \in C_1(\Lambda)$ et que

$$D_b I(b) = \int_0^{+\infty} D_b f_{a,b}(x)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-bx}\, dx = \frac{1}{b}.$$

En primitivant, on obtient finalement qu'il existe $C = C_a \in \mathbb{R}$ tel que

$$I(b) = \ln(b) + C, \quad \forall b > 0$$

Comme on a $I(a) = 0$, on en conclut que $C = -\ln(a)$ de sorte que

$$I(b) = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

On obtient donc au final

$$\int_0^{+\infty} \frac{f_{a,b}(x)}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} I(b) = \frac{\ln(\frac{b}{a})}{b-a}.$$

Exercice 3. 3.1) La fonction $\chi_{[a,b]}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto e^{-r|x+s|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $r > 0$ et $s \in \mathbb{R}$. Par un calcul direct, on obtient

$$\mathcal{F}_\xi^- \chi_{[a,b]} = \int_a^b e^{-ix\xi}\,dx = \begin{cases} i\,\dfrac{e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}}{\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ b-a & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

et

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}^-(e^{-r|x+s|}) = e^{is\xi}\mathcal{F}_{x\to\xi}^-(e^{-r|x|}) = 2r\frac{e^{is\xi}}{r^2+\xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

La transformée de Fourier positive de ces deux fonctions est alors immédiate vu que, si $g \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}_\xi^+ g = \mathcal{F}_{-\xi}^- g$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

3.2) La fonction $x \mapsto xe^{-x^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et est en fait la dérivée de $-g_{1/2}$. Dès lors,

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}^-(xe^{-x^2/2}) = -i\xi\,\mathcal{F}_\xi^- g_{1/2} = -i\sqrt{2\pi}\,\xi\,e^{-\xi^2/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

3.3) Pour $a \neq 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)\sin(x)}{x(a^2+x^2)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et même sur $\mathbb{R}$.
On remarque que la valeur de l'intégrale est une fonction paire en a.
Pour $a > 0$, on a successivement

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x(a^2+x^2)}\,dx &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2+x^2}\,\frac{\sin(2x)}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{16a}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_x^- \chi_{[-2,2]}\,\mathcal{F}_{y\to x}^+(e^{-a|y|})\,dx \\ &= \frac{\pi}{8a}\int_{-2}^{2} e^{-a|x|}\,dx \quad = \quad \frac{\pi}{4a^2}(1-e^{-2a}) \end{aligned}$$

en utilisant les théorèmes du transfert et de Fourier. Ainsi, pour $a \neq 0$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x(a^2+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{4a^2}(1-e^{-2|a|}).$$

30 octobre 2015(V1 :10/11/13)