ANALYSE III Liste pour le TD du 15 décembre 2015

Exercice 1. a) Est-il possible de calculer $Ln\left((1+i)^i\right)$? Pourquoi? Si la réponse est affirmative, déterminer la valeur de ce complexe.
b) On pose $f_+(z) = Ln(1+iz)$, $f_-(z) = Ln(1-iz)$ et $f(z) = f_+(z) - f_-(z)$. Où la fonction$f$ est-elle holomorphe?
c) Montrer que la restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction if est une fonction à valeurs réelles et déterminer cette fonction.

Exercice 2. a) Soit γ la courbe d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ (on suppose que la courbe est orientée "aire à gauche"). Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_\gamma \frac{7z-6}{z^2-2z}dz$.

b) Soit γ le bord d'un carré dont l'intérieur contient l'origine. Déterminer la valeur de

$$\int_\gamma e^{1/z^2} dz \quad \text{et} \quad \int_\gamma z e^{1/z^2} dz$$

c) Soit γ le bord (orienté "aire à gauche") du carré centré en $1/2$, de côtés parallèles aux axes et de longueur 1. Déterminer $\int_\gamma \overline{z}\, dz$ et $\int_\gamma (\Re z)^2\ dz$.

Exercice 3. Calculer (si possible) les intégrales suivantes: $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5}-\cos\theta}$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^4}dx$.

Exercice 4. On donne explicitement les fonctions suivantes

$$f_1(z) = \frac{\sin z}{z^2}, \quad f_2(z) = \frac{e^{z^2+1}}{z^2+1}, \quad f_3(z) = \frac{\sin z}{\sin(iz)}.$$

a) Où ces fonctions sont-elles holomorphes?
b) Quelles sont les sigularités isolées? De quels types sont-elles?
c) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.
d) Déterminer le développement de Laurent (expressions explicites de h, H et du développement en série de puissances entières) de f_1 au voisinage des singularités isolées.

Exercice 5. Vrai ou faux? Justifier.

5.1) Si f est holomorphe dans $\mathbb{C}_0$ et admet une limite nulle à l'infini, alors f est nul dans $\mathbb{C}_0$.

5.2) La fonction $z \mapsto \overline{\exp(\overline{z})}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

5.3) La fonction $z \mapsto \sum_{m=1}^{+\infty}(z-i)^m$ est holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

5.4) Soient Ω un ouvert du plan complexe, $z_0 \in \Omega$ et une fonction f holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$.
a) Si le résidu de f est nul en z_0, alors f se prolonge en une fonction holomorphe dans Ω.
b) Si le résidu de f est nul en z_0, alors le résidu de Df l'est aussi.
c) Si le résidu de Df est nul en z_0, alors le résidu de f l'est aussi.
d) Si z_0 est une singularité essentielle pour f, alors il en est de même pour Df.
e) Le point z_0 est un pôle d'ordre fini (non nul) pour f si et seulement si $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.
f) Le point z_0 est une singularité essentielle pour f si et seulement si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ n'existe pas.

Exercice 6. a) Développer la fonction $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$ en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0,\pi])$.
b) Dans $L^2([-\pi,\pi])$, on donne le développement suivant

$$x^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(mx)$$

où les a_m ($m \in \mathbb{N}$) sont des réels. Que vaut le coefficient a_2?
c) Montrer que le développement en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0, 2\pi])$ de la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

est

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(mx)}{m}$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$$