Analyse III Liste pour le TD du 27 octobre 2015

Exercice 1. 1.1) Soit la courbe du plan d'équation cartésienne $4x^2 + 8x + y^2 = 0$ dans un repère orthonormé. Représenter cette courbe et déterminer (si possible) la valeur des intégrales suivantes lorsque f est donné par $f(x, y) = y\ (x + 1)$ en n'oubliant pas de préciser (dans les deux cas) s'il faut considérer la courbe orientée ou non orientée

$$(a) \int_{\mathcal{C}} f(x, y)\ dx \qquad\qquad (b) \int_{\mathcal{C}} f\ ds$$

1.2) Calculer la longueur de la courbe $\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cosh x,\ x \in [0, 1]\right\}$ et en donner une représentation dans un repère orthonormé.

1.3) Soient $\vec{f}(x, y) = [x + y, -x]$ et $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + 4x^4 - 4x^2 = 0, x \geq 0\}$.
- Montrer que $\vec{\gamma}(t) = [\sin t, \sin 2t]$ avec $t \in [0, \pi]$ est un paramétrage de Γ.
- Calculer

$$\int_{\Gamma^+} f_1 dx + f_2 dy$$

sachant qu'une intégrale curviligne est indépendante du paramétrage pour autant qu'il soit injectif (sauf peut-être aux extrémités) et de classe C_1.

1.4) On fixe un repère orthonormé du plan et on donne une courbe par son équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$. Si $\mathcal{C}$ désigne la partie de la courbe située dans le premier quadrant, déterminer

$$(a) \int_{\mathcal{C}} x\ ds \qquad\qquad (b) \int_{\mathcal{C}} x\ dx$$

en spécifiant (si besoin) l'oriention choisie. (Choisir un paramétrage injectif et régulier, mais il n'est pas nécessaire de justifier ces propriétés.)

Exercice 2. Soient les réels a, b tels que $0 < a < b$. On pose

$$f(x) = e^{-ax}\chi_{]0,+\infty[}(x), \quad g(x) = e^{-bx}\chi_{]0,+\infty[}(x)$$

2.1) Déterminer (si possible) l'expression explicite du produit de convolution de f et g en tout réel.

2.2) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{(f * g)(x)}{x} dx = \frac{\ln(b/a)}{b - a}.$$

Suggestions: transformer $1/x$ en une intégrale ou utiliser le théorème de dérivation des intégrales paramétriques.

Exercice 3. 3.1) Soient a, b réels tels que $a < b$ et soient $r, s \in \mathbb{R}$. Si possible, déterminer les transformées de Fourier des fonctions $\chi_{[a,b]}$ et $x \mapsto e^{-r|x+s|}$. Au besoin, donner des précisions sur les paramètres a, b, r, s.

3.2) Sachant que $\mathcal{F}^{\pm} g_\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} g_{1/(4\sigma)}$ si $\sigma > 0$ et $g_\sigma(t) = e^{-\sigma t^2}$, déterminer la transformée de Fourier (-) de la fonction $x \mapsto xe^{-x^2/2}$.

3.3) Quel que soit le réel non nul a, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x\ (a^2 + x^2)} dx$$

FB, October 21, 2015(V1:18/10/15)