Analyse III

Matière théorique pour l'examen de janvier 2017

Intégrales paramétriques, transformation de Fourier, produit de convolution

1. Dérivation des intégrales paramétriques: énoncé
2. Ce qui a été fait au cours (définitions - énoncés de propriétés et théorèmes - preuves) concernant la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$
3. Ce qui a été fait au cours (définitions - énoncés de propriétés et théorèmes - preuves) concernant le produit de convolution de deux fonctions

Fonctions (holomorphes) d'une variable complexe

1. Intégrale curviligne $\int_\gamma f(z)dz$; définition et propriétés générales.
   Enoncés et preuves (ce qui a été fait ou suggéré au cours).
2. Définition d'une fonction holomorphe. Caractérisation à l'aide de l'équation de Cauchy-Riemann.
   Enoncés et preuves (ce qui a été fait ou suggéré au cours).
3. Propriétés générales relatives aux fonctions holomorphes (composition, annulation, ...): énoncés et preuves (ce qui a été fait ou suggéré au cours).
   Connaître les fonctions holomorphes élémentaires, leurs propriétés et comment les utiliser.
4. La représentation intégrale de Cauchy pour les fonctions holomorphes. Enoncé et preuve.
5. Conséquences de la représentation intégrale de Cauchy:
   - dérivabilité (C_∞) d'une fonction holomorphe, holomorphie de ses dérivées partielles, représentation intégrale des dérivées
   - théorème de Liouville: caractérisation des fonctions entières avec bornation "polynomiale"
   - développement en série de puissances d'une fonction holomorphe (série de Taylor).

   Enoncés et preuves (ce qui a été fait ou suggéré au cours).
6. Zéros d'une fonction holomorphe
   -définition, caractérisation.
   -propriétés spécifiques relatives aux zéros de multiplicité p (de multiplicité finie $p \in \mathbb{N}_0$) ou d'ordre infini (zéro identique).

   Enoncés et preuves (ce qui a été fait ou suggéré au cours).
7. Théorème de Laurent: énoncé; preuve de l'unicité.
8. Singularités isolées (singularité de type pôle et singularité essentielle): définition, caractérisation (énoncés et preuves; ce qui a été fait ou suggéré au cours)
9. Résidus:
   - définition d'un résidu, calcul d'un résidu (expression explicite dans certains cas)
   - énoncé du "Théorème des résidus"

Espaces de Hilbert, bases orthonormées, cas des séries trigonométriques de Fourier

1. Ce qui a été fait au cours (définitions - énoncés de propriétés et théorèmes - preuves) concernant
   - la définition et les propriétés générales d'un espace vectoriel avec produit scalaire et norme associée (espace pre-hilbertien, de Hilbert)
   - les suites orthonormées, suites orthonormées totales, propriétés de type "Pythagore, projection orthogonale"
   - le cas de l'espace $L^2(A)$
   - les résultats relatifs aux séries trigonométriques de Fourier dans $L^2([a, b])$