1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématique

Corrigé de l'examen de Mathématique du 16 août 2016

Version 16 juin 2016

QUESTIONNAIRE

Théorie 1. On donne une fonction f continûment dérivable sur $]-\infty, 1[$.

(1.1) Quel est l'énoncé du « théorème des accroissements finis » pour f dans cet intervalle ?

(1.2) Donner une interprétation graphique de l'énoncé donné en guise de réponse au point précédent pour la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ et les points -2, 0.

(1.3) En utilisant le théorème des accroissements finis énoncé au premier point, démontrer que si la dérivée de f s'annule en tout point de $]-\infty, 1[$, alors cette fonction est constante sur $]-\infty, 1[$.

Théorie 2.

(2.1) Définir le produit scalaire de deux vecteurs.

(2.2) En établir (énoncé + preuve) l'expression analytique dans une base orthonormée de l'espace.

Exercices

1. (a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi/2, 3\pi/2]$, résoudre l'équation suivante

$$2\sin^2(x) = \sin(2x).$$

(b) Après avoir justifié si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes en énonçant les propriétés utilisées

$$(*)\ \exp\left(\ln(8) - \ln(\sqrt{2})\right) \qquad (**)\ \text{arcos}\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right).$$

(c) Déterminer les parties réelle et imaginaire du nombre complexe

$$z = \frac{1}{i(4-i)}.$$

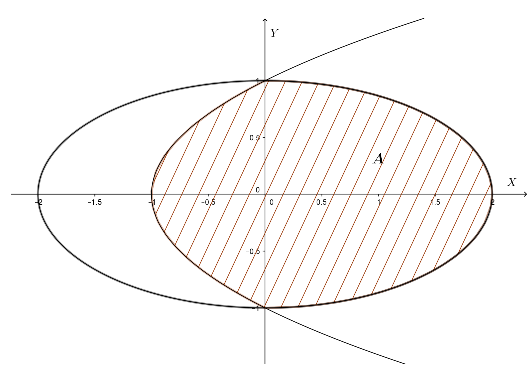
2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes

$$(*)\ \lim_{x\to 0^-} |x|\, e^{1/x^2} \qquad (**)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{1-x}}.$$

3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum

$$(*)\ \int_{-\pi/4}^{0} \frac{\text{tg}(x)}{\cos^2(x)}\, dx, \qquad (**)\ \int_{-\infty}^{-1} \frac{x+1}{x(x^2+1)}\, dx.$$

4. Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré A ci-contre en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une parabole et l'autre une ellipse.)



5. (a) Vérifier que la fonction $f : t \mapsto t^2 e^{-t}$ est solution de l'équation différentielle

$$tDf(t) = (2-t)f(t).$$

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2 f(x) + 2Df(x) + f(x) = 1 + e^{-x}.$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.
Trois vannes coulant ensemble dans un bassin, le rempliraient en un certain nombre d'heures. La première seule mettrait le double de temps ; la deuxième six heures de plus que les trois ensemble ; la troisième seule, 15 heures de plus. En combien de temps le bassin pourrait-il être rempli par chacune des trois vannes ? Et par les trois réunies ?

CORRIGE

Théorie

Théorie 1.

On donne une fonction f continûment dérivable sur $]-\infty, 1[$.

(1.1) **Quel est l'énoncé du « théorème des accroissements finis » pour f dans cet intervalle ?**

(1.2) **Donner une interprétation graphique de l'énoncé donné en guise de réponse au point précédent pour la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ et les points -2, 0.**

(1.3) **En utilisant le théorème des accroissements finis énoncé au premier point, démontrer que si la dérivée de f s'annule en tout point de $]-\infty, 1[$, alors cette fonction est constante sur $]-\infty, 1[$.**

Pour une réponse « type », voir notes de cours.

Théorie 2.

(2.1) Définir le produit scalaire de deux vecteurs.

(2.2) En établir (énoncé + preuve) l'expression analytique dans une base orthonormée de l'espace.

Pour une réponse « type », voir notes de cours.

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi/2, 3\pi/2]$, résoudre l'équation suivante**

$$2\sin^2(x) = \sin(2x).$$

Solution. L'équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$ et, puisque $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, elle est équivalente à

$$2\sin^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(x)(\sin(x) - \cos(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow x = k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[\pi/2, 3\pi/2]$ sont π et $\dfrac{5\pi}{4}$.

(b) Après avoir justifié si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes en énonçant les propriétés utilisées

$$(*) \ \exp\left(\ln(8) - \ln(\sqrt{2})\right) \qquad (**) \ \operatorname{arcos}\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right).$$

Solution. (*) La fonction ln est définie sur $]0,+\infty[$ et son image est $\mathbb{R}$. De plus, exp est défini sur $\mathbb{R}$; dès lors, l'expression donnée est définie.
Comme $\forall x,\ y>0,\ M\in\mathbb{N}_0$ on a

$$M\ln(x)=\ln(x^M)\ ,\ln(x)-\ln(y)=\ln\left(\frac{x}{y}\right)\ \text{ et }\ \exp(\ln(x))=x,$$

l'expression s'écrit successivement

$$\exp\left(\ln(8)-\ln(\sqrt{2})\right)=\exp\left(\ln(2^3)-\ln(2^{\frac{1}{2}})\right)=\exp\left(\ln\left(2^{\frac{5}{2}}\right)\right)=2^{\frac{5}{2}}=4\sqrt{2}.$$

(**) La fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$ et son image est $[-1,1]$. De plus, la fonction arcos est définie sur $[-1,1]$; dès lors, l'expression donnée est définie.
On a $\text{arcos}\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)=\ \text{arcos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\right)=\ \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}$ car $\text{im(arcos)}=[0,\pi]$.

(c) Déterminer les parties réelle et imaginaire du nombre complexe

$$z=\frac{1}{i(4-i)}.$$

Solution. On a

$$z=\frac{-i(4+i)}{16+1}=\frac{1-4i}{17}.$$

La partie réelle de z vaut donc $1/17$ et sa partie imaginaire vaut $-4/17$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$(*)\ \lim_{x\to 0^-}|x|\,e^{1/x^2}\qquad\qquad (**)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{1-x}}.$$

Solution. (*) La fonction $x\mapsto |x|\,e^{1/x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}_0$. Puisque tout intervalle ouvert contenant 0 rencontre $\mathbb{R}_0\cap]-\infty,0[=]-\infty,0[$, le calcul de la limite en 0^- peut être envisagé.
Comme $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$, on a

$$\lim_{x\to 0^-}e^{1/x^2}=\lim_{y\to+\infty}e^y=+\infty.$$

Pour lever l'indétermination $0\ .\ \infty$, on utilise le théorème de l'Hospital en écrivant la fonction sous la forme $x\mapsto\dfrac{e^{1/x^2}}{\frac{1}{|x|}}$ et on en vérifie les hypothèses.

Si $V=]-\infty,0[$, on a
1) $f_1:x\mapsto e^{1/x^2}$ et $f_2:x\mapsto\frac{1}{|x|}=-\frac{1}{x}$ sont dérivables dans V
2) $Df_2(x)=\frac{1}{x^2}\neq 0$ dans V
3) $\lim\limits_{x\to 0^-}f_2(x)=+\infty$ (et $\lim\limits_{x\to 0^-}f_1(x)=+\infty$)
4) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{Df_1(x)}{Df_2(x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{-2e^{1/x^2}}{x^3}}{\frac{1}{x^2}}=-2\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{1/x^2}}{x}=(-2)\,.\,(-\infty)=+\infty$
Dès lors, la limite cherchée vaut $+\infty$.

(**) La fonction $x\mapsto\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{1-x}}$ est définie sur $\{x\in\mathbb{R}:x^2-1\geq 0,\ 1-x>0\}=]-\infty,-1]$, ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé. Cela étant, on a

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{1-x}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-x-1}=+\infty.$$

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$(*)\ \int_{-\pi/4}^{0} \frac{\mathrm{tg}(x)}{\cos^2(x)}\ dx, \qquad\qquad (**)\ \int_{-\infty}^{-1} \frac{x+1}{x(x^2+1)}\ dx.$$

Solution. (*) La fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{tg}(x)}{\cos^2(x)}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$; elle est donc continue sur l'intervalle fermé borné $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ donc intégrable sur cet intervalle. Cela étant, comme $D\mathrm{tg}(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, on a

$$\int_{-\pi/4}^{0} \frac{\mathrm{tg}(x)}{\cos^2(x)}\ dx = \left[\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2(x)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} = \frac{1}{2}(\mathrm{tg}^2(0) - \mathrm{tg}^2(-\pi/4)) = -\frac{1}{2}.$$

(**) La fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x(x^2+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}_0$ donc sur $]-\infty, -1]$, ensemble non borné. Pour vérifier l'intégrabilité de la fonction en $-\infty$, on peut utiliser le critère en θ de la manière suivante : calculons la limite

$$\lim_{x\to-\infty} \left(|x|^2 \left|\frac{x+1}{x(x^2+1)}\right|\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^2\ \frac{x+1}{x^3+x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1.$$

Comme cette limite existe et est finie avec $\theta = 2 > 1$, par le critère d'intégration en θ, f est intégrable en $-\infty$ donc finalement sur $]-\infty, -1]$.
Décomposons la fraction donnée en une somme de fractions simples ; on a

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)x}{x(x^2+1)},\ x \in \mathbb{R}_0$$

ce qui donne $A = 1$, $B = -1$ et $C = 1$.
Comme

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+1}\right)\ dx \simeq \int \frac{1}{x}\ dx\ - \int \frac{x-1}{x^2+1}\ dx \simeq \int \frac{1}{x}\ dx\ - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\ dx + \int \frac{1}{x^2+1}\ dx$$

$$\simeq\ \ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \mathrm{arctg}(x) \simeq\ \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \mathrm{arctg}(x),\ x \in]-\infty, 0[,$$

on a

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{x+1}{x(x^2+1)}\ dx = \left[\ \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \mathrm{arctg}(x)\right]_{x\to-\infty}^{-1}$$

$$= \ln\left(1/\sqrt{2}\right) + \mathrm{arctg}(-1) - \lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \mathrm{arctg}(x)\right)$$

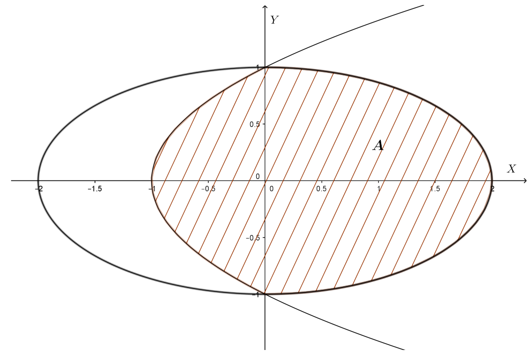
$$= -\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4} - \lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2),$$

l'application du théorème de la limite d'une fonction composée donnant

$$\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right) = 0 \text{ car } \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{|x|} = 1 \text{ et } \lim_{y\to1}\ln(y) = 0.$$

Remarque : puisque la fonction est positive sur l'intervalle d'intégration, on pouvait également prouver l'intégrabilité en utilisant la définition.

4. **Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré A ci-contre en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une parabole et l'autre une ellipse.)**



Solution.
L'ellipse a pour équation cartésienne $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ou encore $x^2 + 4y^2 = 4$; celle de la parabole est $y^2 = 1 + x$. Dès lors, l'ensemble A fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0],\ y \in [-\sqrt{1+x}, \sqrt{1+x}]\}$$
$$\cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2],\ y \in \left[-\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}, \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right]\right\}.$$

5. **(a) Vérifier que la fonction $f : t \mapsto t^2 e^{-t}$ est solution de l'équation différentielle**

$$tDf(t) = (2 - t)f(t).$$

Solution. La fonction donnée est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. En appliquant le théorème de dérivation d'un produit, on obtient

$$tDf(t) = t(2t\, e^{-t} - t^2\, e^{-t}) = t^2\, e^{-t}(2 - t) = (2 - t)f(t).$$

Dès lors, la fonction f est bien solution de l'équation différentielle donnée.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2 f(x) + 2Df(x) + f(x) = 1 + e^{-x}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2 f(x) + 2Df(x) + f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 2z + 1$ dont le zéro double est -1. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$(c_1 x + c_2)e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto 1 + e^{-x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme g est une somme de deux fonctions, cherchons tout d'abord une solution particulière de $D^2 f(x) + 2Df(x) + f(x) = 1$ (*) .

On voit immédiatement que $f_1(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}$ est solution de (*).

Cherchons à présent une solution particulière de $D^2 f(x) + 2Df(x) + f(x) = e^{-x}$ (**).
Le second membre de cette équation est l'exponentielle polynôme $1.e^{-x}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient -1 de l'argument est solution double de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_2(x) = Ax^2\, e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.

Comme $Df_2(x) = A(2x - x^2)e^{-x}$ et $D^2 f_2(x) = A(2 - 4x + x^2)e^{-x}$, en remplaçant dans (**), on a

$$A(2 - 4x + x^2 + 4x - 2x^2 + x^2)e^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $f_2(x) = \dfrac{x^2}{2}\, e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$\left(c_1 x + c_2 + \frac{x^2}{2}\right) e^{-x} + 1,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Trois vannes coulant ensemble dans un bassin, le rempliraient en un certain nombre d'heures.
La première seule mettrait le double de temps ; la deuxième six heures de plus que les trois ensemble ; la troisième seule, 15 heures de plus.
En combien de temps le bassin pourrait-il être rempli par chacune des trois vannes ? Et par les trois réunies ?

Solution. Soit $x > 0$ le temps en heures mis par les trois vannes coulant ensemble pour remplir le bassin. Dès lors, la première vanne seule met $2x$ heures, la deuxième $(x+6)$ heures et la troisième $(x+15)$ heures. Si $V \neq 0$ est le volume en litres du bassin, les débits de chacune des vannes sont respectivement $\frac{V}{2x}$, $\frac{V}{x+6}$ et $\frac{V}{x+15}$ et le débit des trois vannes ensemble vaut $\frac{V}{x}$. On a alors la relation

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{x}.$$

Cette relation est une équation en x que l'on résout ; en réduisant au même dénominateur, on a

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (x+6)(x+15) + 2x(x+15) + 2x(x+6) = 2(x+6)(x+15)$$

$$\Leftrightarrow 2x(2x+21) = x^2 + 21x + 90 \Leftrightarrow 3x^2 + 21x - 90 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 30 = 0 \Leftrightarrow (x+10)(x-3) = 0.$$

Comme x est positif, la seule solution admise est 3. Ainsi, lorsque les trois vannes sont réunies, il faut 3 heures pour remplir le bassin ; il est rempli en $2 \,.\, 3 = 6$ heures par la première vanne seule, en $3 + 6 = 9$ heures par la deuxième et en $3 + 15 = 18$ heures par la troisième.