1, 2, 3...Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématique

Corrigé de l'examen de Mathématique du 25 mai 2016

Version 2 mai 2016

QUESTIONNAIRE

Théorie 1. On donne une fonction f continûment dérivable sur $]1,+\infty[$.

(1.1) Quel est l'énoncé du « théorème des accroissements finis » pour f dans cet intervalle ?

(1.2) Donner une interprétation graphique de l'énoncé donné en guise de réponse au point précédent pour la fonction $x \mapsto \ln(x-1)$ et les points 2, 3.

(1.3) En utilisant le théorème des accroissements finis énoncé au premier point, démontrer que si la dérivée de f s'annule en tout point de $]1,+\infty[$, alors cette fonction est constante sur $]1,+\infty[$.

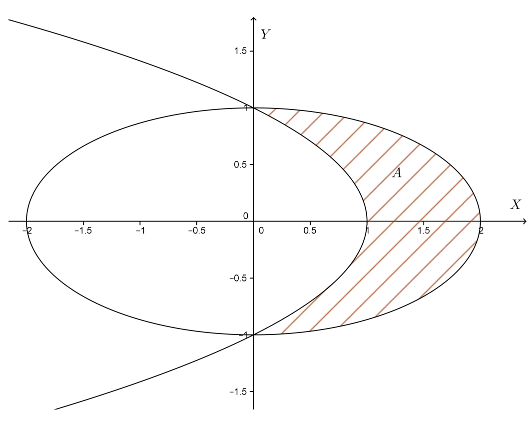
Théorie 2.

(2.1) On donne une fonction continue sur l'intervalle $[1,+\infty[$. Quand dit-on que celle-ci est intégrable sur cet intervalle ?

(2.2) Utiliser la définition donnée au point précédent pour établir la condition nécessaire et suffisante sur r sous laquelle la fonction $x \mapsto x^r$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Exercices

1. (a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi/2, 3\pi/2]$, résoudre l'équation suivante
$$2\cos^2(x) = \sin(2x).$$
(b) Après avoir justifié si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes en énonçant les propriétés utilisées
$$(*)\ \exp\Big(\ln(2) - 2\ln(3)\Big) \qquad (**)\ \text{arctg}\left(\text{tg}\left(\frac{11\pi}{4}\right)\right).$$
(c) Déterminer la partie imaginaire et le module du nombre complexe
$$z = \frac{1}{i(3+i)}.$$
2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes
$$(*)\ \lim_{x\to+\infty} x\, e^{1/x^2} \qquad (**)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{\ln(1-x)}.$$
3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum
$$(*)\ \int_{-\pi/4}^{0} \sin(x)\cos(x)\ dx, \qquad (**)\ \int_1^{+\infty} \frac{2x-1}{x^3+x}\ dx.$$
4. Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré A ci-contre en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une parabole et l'autre une ellipse.)



5. (a) Vérifier que la fonction $f : t \mapsto te^{-t^2}$ est solution de l'équation différentielle

$$tDf(t) = (1 - 2t^2)f(t).$$

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2 f(x) + 2Df(x) = 1 + e^x.$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.
Maxime et Céline prennent le train chaque matin pour se rendre à leur travail. Maxime parcourt une distance de 20 km tandis que Céline n'en parcourt que 15. Les deux trajets sont cependant de même durée car la vitesse moyenne du train de Maxime est de 25km/h plus élevée que celle du train de Céline. Quelles sont les vitesses moyennes de chaque train ?

CORRIGE

Théorie

Théorie 1.

On donne une fonction f continûment dérivable sur $]1, +\infty[$.

(1.1) **Quel est l'énoncé du « théorème des accroissements finis » pour f dans cet intervalle ?**

(1.2) **Donner une interprétation graphique de l'énoncé donné en guise de réponse au point précédent pour la fonction $x \mapsto \ln(x-1)$ et les points 2, 3.**

(1.3) **En utilisant le théorème des accroissements finis énoncé au premier point, démontrer que si la dérivée de f s'annule en tout point de $]1, +\infty[$, alors cette fonction est constante sur $]1, +\infty[$.**

Pour une réponse « type », voir notes de cours.

Théorie 2.

(2.1) On donne une fonction continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Quand dit-on que celle-ci est intégrable sur cet intervalle ?

(2.2) Utiliser la définition donnée au point précédent pour établir la condition nécessaire et suffisante sur r sous laquelle la fonction $x \mapsto x^r$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Pour une réponse « type », voir notes de cours.

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi/2, 3\pi/2]$, résoudre l'équation suivante**

$$2\cos^2(x) = \sin(2x).$$

Solution. L'équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$ et, puisque $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, elle est équivalente à

$$2\cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(x)(\cos(x) - \sin(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(x) = \sin(x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[\pi/2, 3\pi/2]$ sont $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}$.

(b) Après avoir justifié si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes en énonçant les propriétés utilisées

$$(*) \ \exp\Big(\ln(2) - 2\ln(3)\Big) \qquad (**) \ \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{4}\right)\right).$$

Solution. (*) La fonction ln est définie sur $]0,+\infty[$ et son image est $\mathbb{R}$. De plus, exp est défini sur $\mathbb{R}$; dès lors, l'expression donnée est définie.
Comme $\forall x,\ y>0,\ M\in\mathbb{N}_0$ on a

$$M\ln(x)=\ln(x^M)\ ,\ln(x)-\ln(y)=\ln\left(\frac{x}{y}\right)\ \text{ et }\ \exp(\ln(x))=x,$$

l'expression s'écrit successivement

$$\exp\Big(\ln(2)-2\ln(3)\Big)=\exp\Big(\ln(2)-\ln(3^2)\Big)=\exp\left(\ln\left(\frac{2}{9}\right)\right)=\frac{2}{9}.$$

(**) La fonction tg est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ et son image est $\mathbb{R}$. De plus, la fonction arctg est définie sur $\mathbb{R}$; dès lors, l'expression donnée est définie.
On a $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{4}\right)\right)=\ \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)=\ -\frac{\pi}{4}$ car $\operatorname{im}(\operatorname{arctg})=]-\pi/2,\pi/2[$ et tg est périodique de période π.

(c) Déterminer la partie imaginaire et le module du nombre complexe

$$z=\frac{1}{i(3+i)}.$$

Solution. On a

$$z=\frac{-i(3-i)}{9+1}=\frac{-1-3i}{10}.$$

La partie imaginaire de z vaut donc $-3/10$ et son module vaut $\frac{\sqrt{1+9}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$(*)\ \lim_{x\to+\infty}x\,e^{1/x^2}\qquad\qquad(**)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{\ln(1-x)}.$$

Solution. (*) La fonction $x\mapsto x\,e^{1/x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}_0$, ensemble non majoré ; le calcul de la limite en $+\infty$ peut donc être envisagé.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0^+$, on a

$$\lim_{x\to+\infty}e^{1/x^2}=\lim_{y\to 0^+}\frac{e^{y^2}}{y}=+\infty.$$

(**) La fonction $x\mapsto\dfrac{\sqrt{x^2}}{\ln(1-x)}$ est définie sur $\{x\in\mathbb{R} : 1-x>0,\ \ln(1-x)\neq 0\}=]-\infty,0[\cup]0,1[$, ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé. Cela étant, on a

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to-\infty}|x|=+\infty\ \text{ et }\ \lim_{x\to-\infty}\ln(1-x)=\lim_{y\to+\infty}\ln(y)=+\infty.$$

Pour lever l'indétermination $(+\infty)\ /\ (+\infty)$, on utilise le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées. En effet, si $V=]-\infty,0[$, on a
1) $f_1 : x\mapsto|x|=-x$ et $f_2 : x\mapsto\ln(1-x)$ sont dérivables dans V
2) $Df_2(x)=\frac{-1}{1-x}=\frac{1}{x-1}\neq 0$ dans V
3) $\lim\limits_{x\to-\infty}f_2(x)=+\infty$ (et $\lim\limits_{x\to-\infty}f_1(x)=+\infty$)
4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{Df_1(x)}{Df_2(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)=+\infty$
Dès lors, la limite cherchée vaut $+\infty$.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$(*) \quad \int_{-\pi/4}^{0} \sin(x)\cos(x)\ dx, \qquad\qquad (**) \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{2x-1}{x^3+x}\ dx.$$

Solution. (*) La fonction $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc intégrable sur l'intervalle fermé borné $[-\frac{\pi}{4}, 0]$. Cela étant, comme $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$, on a

$$\int_{-\pi/4}^{0} \sin(x)\cos(x)\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{0} \sin(2x)\ dx = \left[-\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}$$

$$= -\frac{1}{4}(\cos(0) - \cos(-\pi/2)) = -\frac{1}{4}.$$

(**) La fonction $x \mapsto \frac{2x-1}{x^3+x}$ est continue sur $\mathbb{R}_0$ donc sur $[1, +\infty[$, ensemble non borné. Pour vérifier l'intégrabilité de la fonction en $+\infty$, on peut utiliser le critère en θ de la manière suivante : calculons la limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\left|\frac{2x-1}{x^3+x}\right|\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2\frac{2x-1}{x^3+x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^3} = 2.$$

Comme cette limite existe et est finie avec $\theta = 2 > 1$, par le critère d'intégration en θ, f est intégrable en $+\infty$ donc finalement sur $[1, +\infty[$.
Décomposons la fraction donnée en une somme de fractions simples ; on a

$$\frac{2x-1}{x^3+x} = \frac{2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)},\ x \in \mathbb{R}_0$$

ce qui donne $A = -1$ et $B = 1$ et $C = 2$.
Comme

$$\int\left(\frac{-1}{x} + \frac{x+2}{x^2+1}\right) dx \simeq -\int\frac{1}{x}\ dx + \int\frac{x+2}{x^2+1}\ dx \simeq -\int\frac{1}{x}\ dx + \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\ dx + 2\int\frac{1}{x^2+1}\ dx$$

$$\simeq\ -\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\text{arctg}(x) \simeq\ \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) + 2\,\text{arctg}(x), x \in]0, +\infty[,$$

on a

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{2x-1}{x^3+x}\ dx = \left[\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) + 2\,\text{arctg}(x)\right]_{1}^{x\to+\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) + 2\,\text{arctg}(x)\right) - \ln\left(\sqrt{2}\right) - 2\,\text{arctg}(1)$$

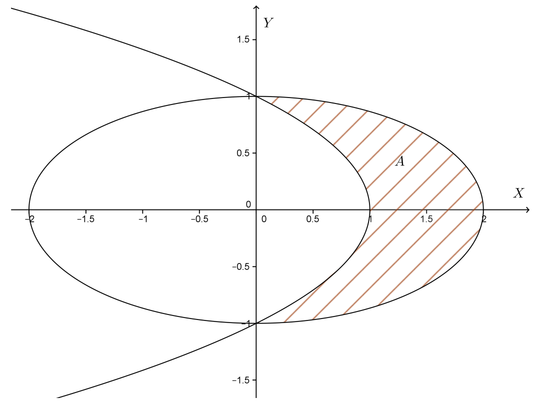
$$= \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) + 2\ .\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\ln(2) - 2\,.\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\ln(2),$$

l'application du théorème de la limite d'une fonction composée donnant

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) = 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x} = 1 \text{ et } \lim_{y\to1}\ln(y) = 0.$$

Remarque : puisque la fonction est positive sur l'intervalle d'intégration, on pouvait également prouver l'intégrabilité en utilisant la définition.

4. **Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré A ci-contre en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une parabole et l'autre une ellipse.)**



Solution.
L'ellipse a pour équation cartésienne $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ou encore $x^2 + 4y^2 = 4$; celle de la parabole est $y^2 = 1 - x$. Dès lors, l'ensemble A fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1],\ x \in [1 - y^2, 2\sqrt{1 - y^2}]\}.$$

5. **(a) Vérifier que la fonction $f : t \mapsto te^{-t^2}$ est solution de l'équation différentielle**

$$tDf(t) = (1 - 2t^2)f(t).$$

Solution. La fonction donnée est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. En appliquant le théorème de dérivation d'un produit, on obtient

$$tDf(t) = t(e^{-t^2} - 2t^2\, e^{-t^2}) = t\, e^{-t^2}(1 - 2t^2) = (1 - 2t^2)f(t).$$

Dès lors, la fonction f est bien solution de l'équation différentielle donnée.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2f(x) + 2Df(x) = 1 + e^x.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2f(x)+2Df(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2+2z$ dont les zéros sont -2 et 0. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1\, e^{-2x} + c_2,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto 1 + e^x$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme g est une somme de deux fonctions, cherchons tout d'abord une solution particulière de $D^2f(x) + 2Df(x) = 1$ (*) .

On voit immédiatement que $f_1(x) = \frac{x}{2},\ x \in \mathbb{R}$ est solution de (*).

Cherchons à présent une solution particulière de $D^2f(x) + 2Df(x) = e^x$ (**).
Le second membre de cette équation est l'exponentielle polynôme $1.e^x$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient 1 de l'argument n'est pas solution de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_2(x) = A\, e^x,\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.
Comme $Df_2(x) = D^2f_2(x) = A\, e^x$, en remplaçant dans (**), on a

$$3Ae^x = e^x \Leftrightarrow A = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, $f_2(x) = \frac{1}{3}\, e^x,\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1\, e^{-2x} + c_2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\, e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Maxime et Céline prennent le train chaque matin pour se rendre à leur travail. Maxime parcourt une distance de $20\,km$ ***tandis que Céline n'en parcourt que*** 15***. Les deux trajets sont cependant de même durée car la vitesse moyenne du train de Maxime est de*** $25km/h$ ***plus élevée que celle du train de Céline. Quelles sont les vitesses moyennes de chaque train ?***

Solution. Soit x la vitesse moyenne en km/h du train de Céline ; celle du train de Maxime est donc $x + 25$. Les deux trajets étant de même durée, on obtient la relation

$$\frac{20}{x+25} = \frac{15}{x}.$$

Cette relation est une équation en x que l'on résout directement ; on a $4x = 3(x+25) \Leftrightarrow x = 75$. Ainsi, le train de Céline roule à 75 km/h et celui de Maxime roule à $75 + 25 = 100$ km/h.