Mathématique
Examen du lundi 4 janvier 2016

QUESTIONNAIRE

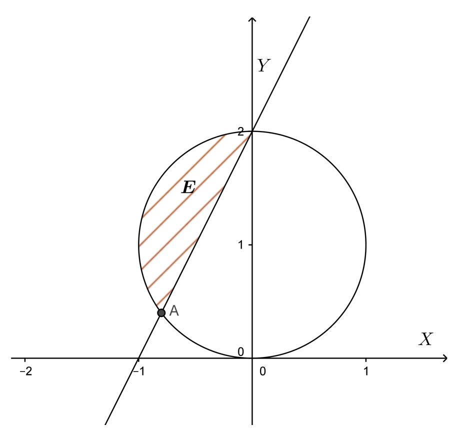
Théorie

Théorie 1. On donne une fonction f définie sur $]-\infty, 0[$.
- Quelle est la définition de la continuité de cette fonction en -1 ?
- Quelle est la définition de la dérivabilité de cette fonction en -1 ? En donner une interprétation graphique.
- Quel(s) est (sont) le(s) lien(s) entre la notion de continuité et de dérivabilité en ce point ? Enoncer et démontrer.

Théorie 2.
- Soit l'équation différentielle $D^2f(x) + aDf(x) + bf(x) = 0$ où a et b sont des nombres réels donnés, f la fonction inconnue et x la variable. Si le discriminant de l'équation caractéristique associée à cette équation vaut -4, donner l'ensemble des solutions de cette équation en utilisant des fonctions exponentielles.
- Donner une expression de ces solutions en utilisant des fonctions sinus et cosinus ; expliquer votre démarche.

Exercices

1. (a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, résoudre l'équation suivante
$$\cos^2(x) + \cos(5x) + \cos(x) = \sin^2(x).$$
(b) Après avoir justifié si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes
$$(*) \quad \exp\left(2\ln(4) - \ln(\sqrt{2})\right), \qquad (**) \ \cos\left(\arccos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
(c) Déterminer la partie imaginaire et le module du nombre complexe
$$z = \frac{i^{39}}{i-2}$$
2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes
$$(*) \quad \lim_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^-} \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2x+1}\right), \qquad (**) \quad \lim_{x\to+\infty} (\ln(1+x).\exp(-x)).$$
3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum
$$(*) \quad \int_{-\sqrt{\pi}/2}^{0} \frac{x}{\cos^2(x^2)}\,dx, \qquad (**) \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 - x^3}\,dx.$$
4. Décrire analytiquement l'ensemble E fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées.



5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
$$D^2 f(x) - 2Df(x) = \ e^{2x}$$
6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.
En revendant ensemble deux objets pour 210 EUR, on réalise un bénéfice de 5 %. Trouver le prix d'achat de chaque objet sachant que l'on a gagné 10 % sur l'un et perdu 10 % sur l'autre.

Exercices BIS (A résoudre par les étudiants qui ne bénéficient pas du bonus)

1. Résoudre l'inéquation suivante (x est l'inconnue réelle)
$$\frac{|1-2x|}{x} \ \geq \ -x$$
2. Si x désigne un réel de l'intervalle $\left]\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right[$ et si $\mathrm{tg}(x) = \frac{-1}{2}$, que valent les nombres
$$\mathrm{cotg}(x),\ \sin(x),\ \cos(x)?$$

CORRIGE

Théorie

Théorie 1.

On donne une fonction f définie sur $]-\infty, 0[$.

- **Quelle est la définition de la continuité de cette fonction en -1 ?**
Solution. Voir cours p. 93 définition 2.5.1 (version 2014-2015)

- **Quelle est la définition de la dérivabilité de cette fonction en -1 ? En donner une interprétation graphique.**
Solution. Voir cours p. 96-97 définition 2.6.1 (1)) (version 2014-2015) en expliquant.

- **Quel(s) est (sont) le(s) lien(s) entre la notion de continuité et de dérivabilité en ce point ? Enoncer et démontrer.**
Solution. Voir cours p. 98 propriété 2.6.1 (version 2014-2015) en expliquant.

Théorie 2.

- **Soit l'équation différentielle $D^2f(x) + aDf(x) + bf(x) = 0$ où a et b sont des nombres réels donnés, f la fonction inconnue et x la variable. Si le discriminant de l'équation caractéristique associée à cette équation vaut -4, donner l'ensemble des solutions de cette équation en utilisant des fonctions exponentielles.**

  Solution. On donne l'équation différentielle à coefficients constants homogène d'ordre 2
$$D^2f(x) + aDf(x) + bf(x) = 0$$
où a et b sont des nombres réels. L'équation caractéristique est donc $z^2 + az + b = 0$. Comme le Δ est égal à $-4 = (2i)^2$, les solutions de cette équation polynomiale sont $\frac{-a+2i}{2} = -\frac{a}{2} + i$ et $\frac{-a-2i}{2} = -\frac{a}{2} - i$.
Dès lors, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle donnée est l'ensemble des fonctions
$$f(x) = c_1\, e^{(-\frac{a}{2}+i)x} + c_2\, e^{(-\frac{a}{2}-i)x},\ x \in \mathbb{R}\ (*)$$
où $c_1,\ c_2$ sont des constantes complexes arbitraires.

– **Donner une expression de ces solutions en utilisant des fonctions sinus et cosinus ; expliquer votre démarche.**
Solution. Vu les propriétés de l'exponentielle, on a $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \ . \ e^{i\beta x}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. De plus, par définition, on a $e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x)$ et on sait que la fonction cosinus est paire et la fonction sinus impaire.
Dès lors, si $\alpha = -\frac{a}{2}$ et $\beta = 1$, on a

$$e^{(-\frac{a}{2}+i)x} = e^{-\frac{a}{2}x} \ . \ e^{ix} = e^{-\frac{a}{2}x}(\cos(x) + i\sin(x))$$

et de même, si si $\alpha = -\frac{a}{2}$ et $\beta = -1$, on a

$$e^{(-\frac{a}{2}-i)x} = e^{-\frac{a}{2}x} \ . \ e^{-ix} = e^{-\frac{a}{2}x}(\cos(-x) + i\sin(-x)) = e^{-\frac{a}{2}x}(\cos(x) - i\sin(x)).$$

En remplaçant dans $(*)$, l'ensemble des solutions s'écrit

$$f(x) = e^{-\frac{a}{2}x}[(c_1+c_2)\cos(x) + i(c_1-c_2)\sin(x)] = c_1'\, e^{-\frac{a}{2}x}\ \cos(x) + c_2'\, e^{-\frac{a}{2}x}\ \sin(x),\ \ x \in \mathbb{R}$$

où $c_1',\ c_2'$ sont des constantes complexes arbitraires.

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, résoudre l'équation suivante**

$$\cos^2(x) + \cos(5x) + \cos(x) = \sin^2(x).$$

Solution. L'équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ et que $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, l'équation est équivalente à

$$\cos(2x) + 2\cos(3x)\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x)\,(1 + 2\cos(3x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \ \text{ ou } \ \cos(3x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \text{ ou } \ \left(3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \text{ ou } \ 3x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ \text{ ou } \ \left(x = \frac{2\pi}{9} + 2k\frac{\pi}{3} \ \text{ ou } \ x = \frac{-2\pi}{9} + 2k\frac{\pi}{3}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sont $\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{2\pi}{9},\ \dfrac{4\pi}{9}$.

(b) Après avoir justifié si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes

$$(*) \quad \exp\left(2\ln(4) - \ln(\sqrt{2})\right), \qquad (**) \ \cos\left(\arcos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Solution. (*) La fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$; de plus, la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$. Dès lors, l'expression donnée est définie et on a

$$\exp\left(2\ln(4) - \ln(\sqrt{2})\right) = \exp(\ln(4^2) - \ln(2^{1/2}) = \exp\left(\ln\left(\frac{2^4}{2^{1/2}}\right)\right) = 8\sqrt{2}$$

car $\ln(x^a) = a\ln(x)\ \forall x > 0,\ a \in \mathbb{R}$, $\ln(x) - \ln(y) = \ln(\frac{x}{y}),\ \forall x, y > 0$ et les fonctions exp et ln sont inverses l'une de l'autre.

Autre méthode (pour les justifications : voir ci-dessus) : l'expression est égale à

$$\exp(2\ln(2^2) - \ln(2^{1/2})) = \exp\left(4\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(2)\right) = \exp\left(\frac{7}{2}\ln(2)\right) = \exp(\ln(2^{7/2}) = 8\sqrt{2}.$$

(**) Comme arcos est défini sur $[-1,1]$ et comme $\pi/2$ n'appartient pas à cet ensemble, l'expression n'est donc pas définie.

(c) Déterminer la partie imaginaire et le module du nombre complexe

$$z = \frac{i^{39}}{i-2}$$

Solution. Puisque $i^{39} = i^{36}\ .\ i^3 = -i$, on a

$$z = \frac{-i}{-2+i} = \frac{-i(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{i^2+2i}{4+1} = \frac{-1+2i}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{2i}{5}.$$

La partie imaginaire de z vaut donc $\frac{2}{5}$.
Son module vaut

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+4}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$(*) \quad \lim_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^-} \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2x+1}\right), \qquad\qquad (**) \quad \lim_{x\to+\infty} (\ln(1+x).\exp(-x)).$$

Solution. (*) La fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{4-x^2}}{2x+1}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 \geq 0 \text{ et } 2x+1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq\ x \leq 2 \text{ et } x \neq -1/2\}$$
$$= \left[-2, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, 2\right].$$

Tout intervalle ouvert comprenant $-1/2$ rencontre $A \cap \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[= \left[-2, -\frac{1}{2}\right[$. Le calcul de la limite en $(-1/2)^-$ peut donc être envisagé. Comme

$$\lim_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^-} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2} \quad \text{ et } \quad \lim_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^-} (2x+1) = 0^-,$$

la limite cherchée vaut $-\infty$.

(**) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)\exp(-x)$ est définie sur $A =]-1, +\infty[$. Cet ensemble n'étant pas majoré, la limite de la fonction en $+\infty$ peut être envisagée. Cela étant, pour lever l'indétermination $(+\infty)\ .\ 0^+$, on utilise le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées, en considérant la fonction sous la forme $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\exp(x)}$.
En effet, si $V =]\varepsilon, +\infty[$ $(\varepsilon > 0)$, on a
1) $f : x \mapsto \ln(1+x)$ et $g : x \mapsto \exp(x)$ sont dérivables dans V
2) $Dg(x) = \exp(x) \neq 0$ dans V
3) $(\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$ et) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$
4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{\exp(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(1+x)\exp(x)} = 0$ puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}((1+x)\exp(x)) = +\infty$.
Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite cherchée vaut 0.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$(*) \quad \int_{-\sqrt{\pi}/2}^{0} \frac{x}{\cos^2(x^2)}\ dx, \qquad\qquad (**) \quad \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - x^3}\ dx.$$

Solution. (*) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\cos^2(x^2)}$ est continue sur

$$\{x \in \mathbb{R} : \cos^2(x^2) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} : k \in \mathbb{N}\right\}$$

donc sur l'intervalle fermé borné $[-\sqrt{\pi}/2, 0]$; elle est donc intégrable sur cet intervalle .

Si on calcule une primitive de f par substitution, on a

$$\int x\ \frac{1}{\cos^2(x^2)}\ dx = \frac{1}{2}\int 2x\ \frac{1}{\cos^2(x^2)}\ dx \simeq \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{\cos^2(t)}\ dt\right]_{t=x^2} \simeq \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}(x^2).$$

Dès lors, par variation de primitive, on a

$$\int_{-\sqrt{\pi}/2}^{0} \frac{x}{\cos^2(x^2)}\ dx = \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}(x^2)\right]_{-\sqrt{\pi}/2}^{0} = 0 - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$$

(**) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - x^3} = \dfrac{1}{x^2(1-x)}$ est continue sur $\mathbb{R}_0 \setminus \{1\}$ donc sur $[2, +\infty[$, ensemble non borné ; de plus, elle est négative sur cet ensemble.

Décomposons la valeur absolue de la fraction donnée pour $x > 1$ en une somme de fractions simples ; on a

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)},\ \ x \in \mathbb{R}_0 \setminus \{1\}$$

où A, B et C sont des constantes réelles à déterminer.
Vu les propriétés des polynômes, on a $1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$ pour tout réel x, ce qui donne $A = B = -1$ et $C = 1$.

Pour tout $t > 2$, la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$, continue sur $[2, t]$, est intégrable sur $[2, t]$ et on a

$$\int_2^t \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}\right)\ dx = \Big[-\ln(x) + \frac{1}{x} + \ln(x-1)\Big]_2^t = \left[\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{x}\right]_2^t$$

$$= \ln\left(\frac{t-1}{t}\right) + \frac{1}{t} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \ln\left(\frac{t-1}{t}\right) + \frac{1}{t} + \ln(2) - \frac{1}{2}.$$

Dès lors,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{x^2(x-1)}\ dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{t-1}{t}\right) + \frac{1}{t}\right] + \ln(2) - \frac{1}{2} = \ln(2) - \frac{1}{2}.$$

En effet, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$ et l'application du théorème de la limite d'une fonction composée donne

$$\lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{t-1}{t}\right) = \lim_{y\to1} \ln(y) = 0$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2(1-x)}$ est à valeurs négatives sur $[2, +\infty[$ et que la limite précédente est finie, la fonction est intégrable et la valeur de son intégrale sur $[2, +\infty[$ vaut $\frac{1}{2} - \ln(2)$.

Autre méthode : calculons la limite

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2|f(x)|) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2(x-1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1} = 0.$$

Comme cette limite existe et est finie avec $\theta = 2 > 1$, par le critère d'intégration en θ, f est intégrable en $+\infty$ donc finalement sur $[2, +\infty[$.

Vu que la fraction donnée se décompose en une somme de fractions simples sous la forme

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-1},\ x \in \mathbb{R}_0 \setminus \{1\}$$

une primitive est donnée par

$$\int f(x)\ dx \simeq\ \ln(|x|) - \ln(|x-1|) - \frac{1}{x} \simeq\ \ln\left(\left|\frac{x}{x-1}\right|\right) - \frac{1}{x} \simeq\ \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{x}, x \in]1, +\infty[,$$

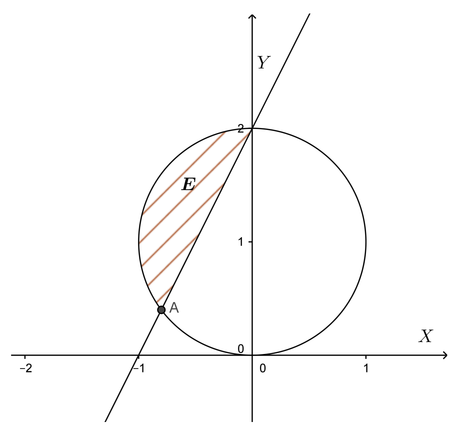
et on a

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 - x^3}\ dx = \left[\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{x}\right]_2^{+\infty} = 0 - \ln(2) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \ln(2)$$

car $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$ et, vu la limite d'une fonction composée, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \ln(1) = 0 \text{ puisque } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1} = 1.$$

4. Décrire analytiquement l'ensemble E fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées.



Solution.

Le cercle de rayon 1 centré au point de coordonnées $(0, 1)$ a pour équation cartésienne $x^2 + (y-1)^2 = 1$ et la droite représentée a pour équation $y = 2x + 2$. L'abscisse du point d'intersection entre les deux courbes est le réel $\frac{-4}{5}$, zéro strictement négatif de l'équation $x^2 + (2x + 2 - 1)^2 = 1$ laquelle est équivalente à $5x^2 + 4x = 0$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[-1, -\frac{4}{5}\right],\ y \in \left[1 - \sqrt{1 - x^2}, 1 + \sqrt{1 - x^2}\right]\right\}$$
$$\cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[-\frac{4}{5}, 0\right],\ y \in \left[2x + 2, 1 + \sqrt{1 - x^2}\right]\right\}.$$

5. **Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle**

$$D^2f(x) - 2Df(x) = e^{2x}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène. Son second membre est continu sur $\mathbb{R}$; on résout donc l'équation sur $\mathbb{R}$.
L'équation homogène associée est $D^2f(x)-2Df(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2-2z$ dont les zéros sont 0 et 2. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1 + c_2\, e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Cherchons une solution particulière de $D^2f(x) - 2Df(x) = e^{2x}$ (*).
Le second membre de cette équation est l'exponentielle-polynôme $x \mapsto 1\ .\ e^{2x}$, produit d'un polynôme de degré 0 et de e^{2x} dont le coefficient 2 de la variable est solution simple de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = A\ x^1\, e^{2x}$, c'est-à-dire $f_P(x) = Ax\ e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.
Comme $Df_P(x) = (A+2Ax)e^{2x}$ et $D^2f_P(x) = (4A+4Ax)e^{2x}$, en remplaçant dans (*) et en divisant les 2 membres par $e^{2x} \neq 0$ pour tout x, on a

$$4A + 4Ax - 2A - 4Ax = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $f_P(x) = \dfrac{x}{2}\, e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1 + \left(c_2 + \frac{x}{2}\right)\, e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
En revendant ensemble deux objets pour 210 EUR, on réalise un bénéfice de 5 %. Trouver le prix d'achat de chaque objet sachant que l'on a gagné 10 % sur l'un et perdu 10 % sur l'autre.

Solution. Soit x le prix d'achat en euros de l'objet sur lequel on fait un bénéfice de 10 % et y celui de l'autre objet. Le problème se traduit donc par le système suivant qu'il faut résoudre. On a successivement

$$\begin{cases} 1,05(x+y) = 210 \\ 1,1x + 0,9y = 210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 105(x+y) = 210\ .\ 10^2 \\ 11x + 9y = 2100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 200 \\ 11x + 9y = 2100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 200 - y \\ 2200 - 11y + 9y = 2100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 150 \\ y = 50 \end{cases}$$

Ainsi le prix d'achat de l'objet sur lequel on fait un bénéfice était de 150 euros et le prix d'achat de l'autre objet était de 50 euros.

$\boxed{\textit{Exercices BIS}}$ (A résoudre par les étudiants qui ne bénéficient pas du bonus)

1. **Résoudre l'inéquation suivante (x est l'inconnue réelle)**

$$\frac{|1-2x|}{x} \ \geq\ -x$$

Solution. Cette inéquation est définie pour tout réel x non nul.
Si $x > 0$, le premier membre est positif ou nul tandis que le second est strictement négatif ; l'inéquation est donc toujours vraie et on a un ensemble de solutions égal à $S_1 =]0, +\infty[$.
Si $x < 0$, le premier membre est strictement négatif tandis que le second est strictement positif ; l'inéquation n'est donc jamais vraie et l' ensemble de solutions est vide.
Dès lors, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]0, +\infty[$.

2. **Si x désigne un réel de l'intervalle $\left]\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right[$ et si $\mathrm{tg}(x) = \frac{-1}{2}$, que valent les nombres**

$$\mathrm{cotg}(x),\ \sin(x),\ \cos(x)?$$

Solution. Comme on travaille dans le quatrième quadrant, $\sin(x)$ et $\mathrm{cotg}(x)$ sont négatifs tandis que $\cos(x)$ est positif.
Puisque $\mathrm{cotg}(x) = \dfrac{1}{\mathrm{tg}(x)}$ si $x \in \left]\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right[$, on a $\mathrm{cotg}(x) = -2$.
Vu l'égalité $\mathrm{tg}^2(x) + 1 = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ si $x \in \left]\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right[$, on a $\cos^2(x) = \frac{1}{1+1/4} = \frac{4}{5}$ et donc $\cos(x) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.
Ainsi, $\sin(x) = \mathrm{tg}(x)\ .\ \cos(x) = (\frac{-1}{2})\ .\ \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.