Mathématique
Interrogation du lundi 9 novembre 2015

QUESTIONNAIRE

Théorie

Théorie 1.

(1.1) On donne une fonction définie sur $]0,+\infty[$. Quand dit-on que cette fonction est dérivable en 1 ? Qu'appelle-t-on dérivée de la fonction en ce point ?

(1.2) Soient deux fonctions, notées f et g, définies sur $]0,+\infty[$. Démontrer que si ces deux fonctions sont dérivables en 1, alors leur produit l'est aussi. Quelle est l'expression explicite de la dérivée du produit, en fonction des autres fonctions et de leur dérivée en 1 ?

Théorie 2.

(2.1) Enoncer la formule donnant la somme des n premières puissances naturelles d'un réel a (commencer à 0).

(2.2) La démontrer.

Exercices

1. (a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[2\pi, 3\pi]$, résoudre l'équation suivante

$$3\cos^2(x) = \sin^2(2x).$$

(b) Si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right).$$

2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes sans utiliser le théorème de l'Hospital

$$(a)\ \lim_{x\to 1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-4}{1-x}\right), \qquad (b)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^2+x|x-1|}.$$

3. (a) On fixe un repère orthonormé du plan.
En le hachurant, représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante

$$\left\{(x,y)\ :\ x,y\in\mathbb{R},\ x^2+4y^2-4\leq 0,\ x\leq 0\ \text{ et } y\leq x+1\right\}$$

(b) Décrire ensuite analytiquement l'ensemble en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.

4. On fixe une base orthonormée de l'espace, notée $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$.
Si $\vec{a} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 2\vec{e_3}$ et si les composantes de $\vec{b}$ dans cette base sont $(-1,0,3)$, déterminer les composantes du produit vectoriel $\vec{b}\wedge\vec{a}$.

5. Si elle existe, déterminer l'expression explicite de la dérivée de la fonction suivante

$$f : x \mapsto \cos^2(3x^2).$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.
Un laborantin doit préparer une solution de 18 ml qui contient 3% de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 10% de glucose et l'autre seulement 2%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?

CORRIGE

Théorie

Question 1.

(1.1) On donne une fonction définie sur $]0,+\infty[$. Quand dit-on que cette fonction est dérivable en 1 ? Qu'appelle-t-on dérivée de la fonction en ce point ?

(1.2) Soient deux fonctions, notées f et g, définies sur $]0,+\infty[$. Démontrer que si ces deux fonctions sont dérivables en 1, alors leur produit l'est aussi. Quelle est l'expression explicite de cette dérivée, en fonction des autres fonctions et de leur dérivée en 1 ?

Voir notes de cours pages 96 - 97 pour la définition et page 99 pour l'énoncé de la propriété démontrée au cours (version 2014-2015).

Question 2.

(2.1) Enoncer la formule donnant la somme des n premières puissances naturelles d'un réel a (commencer à 0).

(2.2) La démontrer.

Voir notes de cours page 6, propriété 1.1.1 (version 2014-2015).

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[2\pi, 3\pi]$, résoudre l'équation suivante**
$$3\cos^2(x) = \sin^2(2x).$$

Solution.
L'équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$ et, puisque $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, elle est équivalente à

$$3\cos^2(x) = 4\sin^2(x)\cos^2(x) \Leftrightarrow 3\cos^2(x) - 4\sin^2(x)\cos^2(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(x)(3-4\sin^2(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin^2(x) = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{-\pi}{3}+2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi-\left(\frac{-\pi}{3}\right)+2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{-\pi}{3}+2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{4\pi}{3}+2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{2\pi}{3}+2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3}+k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{2\pi}{3}+k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[2\pi, 3\pi]$ sont $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{8\pi}{3}$.

(b) Si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante
$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right).$$

Solution. La fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$ et son image est $[-1,1]$; d'autre part, puisque la fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$, l'expression donnée est définie.

On a $\arcsin\left(\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{-\pi}{7}\right)\right) = \frac{-\pi}{7}$ car $\mathrm{im}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes sans utiliser le théorème de l'Hospital**

$$(a)\ \lim_{x\to 1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-4}{1-x}\right), \qquad (b)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^2+x|x-1|}.$$

Solution.

(a) La fonction $f : x \mapsto \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-4}{1-x}\right)$ est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : 1-x \neq 0\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. Soit $B = A \cap\,]-\infty, 1[=]-\infty, 1[$. Comme tout intervalle ouvert contenant 1 rencontre B, la limite de f en 1^- peut être envisagée.

Comme

$$\lim_{x\to 1^-}(x^2-4) = -3 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^-}(1-x) = 0^+,$$

on a

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^2-4}{1-x}\right) = -\infty.$$

De plus,

$$\lim_{t\to -\infty} \operatorname{arctg}(t) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+.$$

Dès lors, par application du théorème de la limite des fonctions composées, on a

$$\lim_{x\to 1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-4}{1-x}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+.$$

(b) La fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x^2+x|x-1|}$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : x^2+x|x-1| \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. En effet,

$$x^2+x|x-1| = \begin{cases} x^2+x^2-x = 2x^2-x & \text{si } x \geq 1 \\ x^2-x^2+x = x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Dès lors,

$$x^2+x|x-1| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(2x-1) \neq 0 & \text{si } x \geq 1 \\ x \neq 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \text{ et } x \neq \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 1 \\ x \neq 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0.$$

Comme cet ensemble est non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé. Cela étant, on a

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^2+x|x-1|} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}}{x} = \lim_{x\to -\infty} -\sqrt{\frac{4}{x^2}+1} = -1.$$

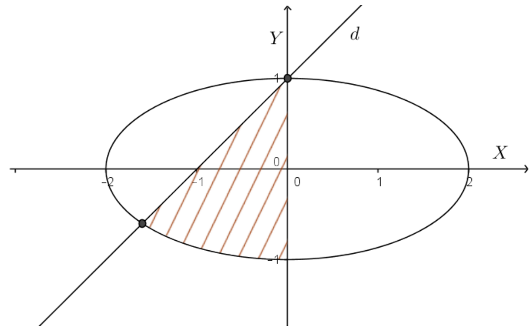
3. **(a) On fixe un repère orthonormé du plan.**
En le hachurant, représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante

$$\left\{(x,y)\ :\ x, y \in \mathbb{R},\ x^2+4y^2-4 \leq 0,\ x \leq 0 \text{ et } y \leq x+1\right\}.$$

(b) Décrire ensuite analytiquement l'ensemble en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.

Solution.

(a) L'équation $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ est celle d'une ellipse qui rencontre les axes aux points de coordonnées (2,0), (-2,0), (0,1) et (0,-1) ; l'équation $x = 0$ est celle de l'axe Y ; l'équation $y = x + 1$ est celle de la droite d de coefficient angulaire 1 et passant par le point de coordonnées (0,1). Une représentation graphique de cet ensemble est la suivante : il s'agit des points du plan de la partie hachurée, les points des "bords" étant compris dans l'ensemble.



(b) On sait que la droite d a pour équation cartésienne $x = y - 1$; celle de l'axe Y est $x = 0$.

Les ordonnées des points d'intersection entre l'ellipse d'équation $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ et la droite d sont solutions de l'équation $(y-1)^2 + 4y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 - 2y - 3 = 0$. Il s'agit de 1 et $\frac{-3}{5}$.

D'autre part, puisque $x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 - 4y^2$, la partie de l'ellipse concernée par l'ensemble a pour équation $x = -2\sqrt{1-y^2}$. Dès lors, l'ensemble donné est décrit analytiquement par

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[-1, \frac{-3}{5}\right],\ x \in \left[-2\sqrt{1-y^2}, 0\right]\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[\frac{-3}{5}, 1\right],\ x \in [y-1, 0]\right\}.$$

4. **On fixe une base orthonormée de l'espace, notée $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$.**
Si $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$ et si les composantes de $\overrightarrow{b}$ dans cette base sont $(-1, 0, 3)$, déterminer les composantes du produit vectoriel $\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}$.

Solution. Puisque $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$, ses composantes dans cette base sont $(1, -1, 2)$. Celles de $\overrightarrow{b}$ dans cette base sont $(-1, 0, 3)$. Dès lors, le produit vectoriel $\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}$ est un vecteur dont les composantes sont $(3, 5, 1)$.

5. **Si elle existe, déterminer l'expression explicite de la dérivée de la fonction suivante**

$$f : x \mapsto \cos^2(3x^2).$$

Solution. La fonction donnée est dérivable sur $\mathbb{R}$. En appliquant le théorème de dérivation des fonctions composées, on obtient

$$Df(x) = D_z z^2|_{z=\cos(3x^2)} \ .\ D_y \cos(y)|_{y=3x^2} \ .D_x 3x^2 = 2\cos(3x^2).(-\sin(3x^2)).6x = -6x\sin(6x^2).$$

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Un laborantin doit préparer une solution de 18 ml qui contient 3% de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 10% de glucose et l'autre seulement 2%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?

Solution. Soit x le nombre de millilitres de la solution contenant 10% de glucose.
Le nombre de millilitres de la solution contenant 2% de glucose vaut donc $(18 - x)$.

Ces solutions contiennent donc respectivement $\frac{10x}{100}$ et $\frac{2(18-x)}{100}$ millilitres de glucose.

On veut que les 18 millilitres de la nouvelle solution contiennent 3% de glucose, c'est-à-dire $\frac{3.18}{100}$ millilitres de glucose.

On a donc $\frac{10x}{100} + \frac{2(18-x)}{100} = \frac{3.18}{100}$, ce qui équivaut à $10x + 36 - 2x = 54 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$.

Ainsi, le laborantin doit prendre 2,25ml de la solution contenant 10% de glucose et 18-2,25=15,75ml de la solution contenant 2% de glucose pour obtenir 18ml de solution à 3%.