1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématique : corrigé du test 1

Version 13 octobre 2015

Corrigé du test 1 du 05-10-2015

1. **Citer deux formules qui permettent de transformer le cosinus d'un réel en un sinus.**

   Solution. - La formule fondamentale nous permet d'écrire $\cos(x) = \pm\sqrt{1-\sin^2(x)}, x \in \mathbb{R}$, signe à déterminer en fonction du quadrant.
   On a donc $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}, x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$
   et $\cos(x) = -\sqrt{1-\sin^2(x)}, x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$.
   - Les "angles associés" (angles complémentaires) vérifient la relation $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2}-x), x \in \mathbb{R}$.
   - Une troisième formule est encore possible $\cos(x) = 1-2\sin^2(\frac{x}{2}), x \in \mathbb{R}$.

2. **Une table ronde a un diamètre de $1,20$ mètre. Elle peut se séparer en deux demi-cercles pour permettre d'insérer deux rallonges rectangulaires de 5 décimètres de large chacune. Sachant que chaque convive doit disposer d'au moins 60 centimètres de "bord de table", combien peut-on en installer au maximum autour de la table ?**
   Si nécessaire, on prendra 3 comme valeur approchée de π.

   Solution. Le rayon de la table vaut 1,20 : 2 $=$ 0,6 $m = 60$ cm et la largeur de chaque rallonge vaut 5 $dm = 50$ cm. En ajoutant les 2 rallonges, le périmètre de celle-ci est alors de
   $2.\pi.60 + 4.50 = 120.\pi + 200 \approx 560$ cm, puisque $\pi \approx 3$.
   Comme 560 : 60 ≈ 9, on peut donc installer au maximum 9 convives autour de la table.

Corrigé du test 1 du 07-10-2015

1. **Résoudre l'inéquation suivante $|x-x^2| < 1$ (x est l'inconnue réelle).**

   Solution. Puisque si r est un réel postif et x un réel, on a $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$, l'inéquation s'écrit $-1 < x-x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2-x-1 < 0 \;\text{ et }\; -x^2+x-1 < 0$

   La première inéquation, de discriminant $\Delta = 1-4.(-1) = 5$, possède comme ensemble de solutions $S_1 =]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$ et la seconde, de discriminant $\Delta = 1-4.(-1)(-1) = -3$, négatif, est toujours vérifiée puisque le coefficient du terme en x^2 est négatif. Son ensemble de solutions est donc $S_2 = \mathbb{R}$
   L'ensemble des solutions de l'inéquation donnée est donc l'ensemble $S = S_1 \cap S_2 =]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$.

   Une **autre méthode** est possible en utilisant la définition de la valeur absolue.
   Si $x-x^2 \geq 0$ c'est-à-dire si $0 \leq x \leq 1$, alors l'inéquation s'écrit $x-x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2-x+1 > 0$. Comme le discriminant $\Delta = 1-4 = -3$ est négatif et le coefficient du terme en x^2 positif, l'inéquation est toujours vérifiée et $S_1 = [0,1]$.
   Si $x-x^2 \leq 0$, c'est-à-dire si $x \leq 0$ ou $x \geq 1$, alors l'inéquation s'écrit $-x+x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2-x-1 < 0$. Comme le discriminant $\Delta = 1-4.(-1) = 5$ est positif, cette inéquation possède comme ensemble de solutions $S_2 =]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0] \cup [1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$.
   Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inéquation donnée est $S = S_1 \cup S_2 =]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$.

2. **Les âges de deux soeurs diffèrent de 6 ans. Dans 9 ans, à elles deux, elles auront 66 ans. Quel âge ont-elles actuellement ?**

   Solution. Soit x l'âge actuel de la soeur cadette.

L'âge actuel de sa soeur ainée est alors $x+6$ et on a

$$\begin{aligned} x+9+(x+6)+9 &= 66 \\ \Leftrightarrow 2x+24 &= 66 \\ \Leftrightarrow 2x &= 42 \\ \Leftrightarrow x &= 21 \end{aligned}$$

Dès lors, la plus jeune des deux soeurs a 21 ans et son ainée a $21+6=27$ ans.