1, 2, 3... Sciences

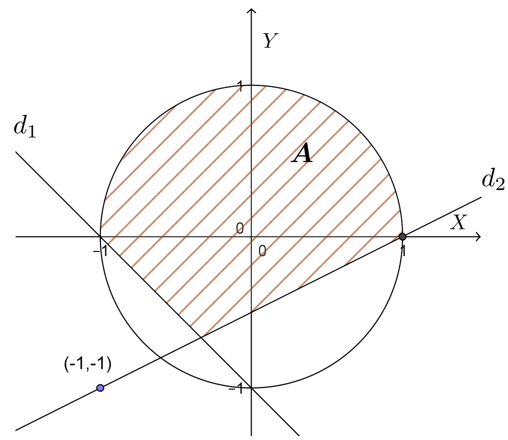
Année académique 2015-2016

Mathématique : corrigé du test 2

Version 19 octobre 2015

Corrigé du test 2 du 14-10-2015

1. **Décrire analytiquement l'ensemble A borné fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées.**



Solution. Le cercle, centré en $(0,0)$ et de rayon 1, a pour équation cartésienne $x^2+y^2=1$. La partie du cercle, correspondant aux ordonnées positives, concernée par l'ensemble A a pour équation $y=\sqrt{1-x^2}$.
Les droites d_1 et d_2 ont respectivement pour équation cartésienne $y=-x-1$ et $y=\dfrac{x-1}{2}$. L'abscisse du point d'intersection de ces deux droites est le réel $\dfrac{-1}{3}$, zéro de l'équation $-x-1=\dfrac{x-1}{2}$.
Dès lors, l'ensemble A fermé hachuré est décrit analytiquement par

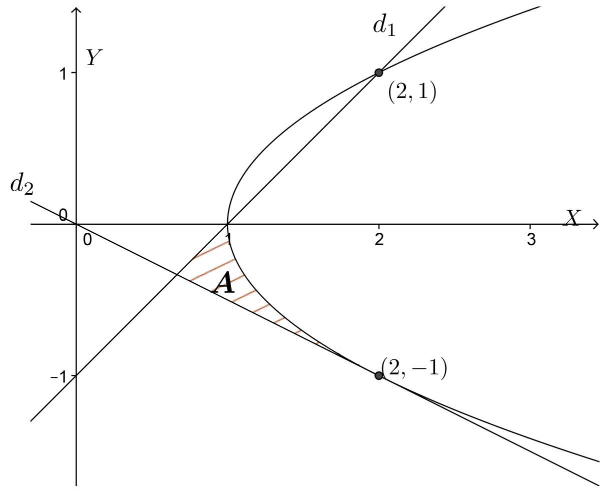
$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in\left[-1,-\frac{1}{3}\right],\ y\in\left[-x-1,\sqrt{1-x^2}\right]\right\}$$
$$\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in\left[-\frac{1}{3},1\right],\ y\in\left[\frac{x-1}{2},\sqrt{1-x^2}\right]\right\}.$$

2. **On fixe une base orthonormée de l'espace, notée $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$.**
Si $\overrightarrow{x}=2\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}+3\overrightarrow{u_3}$ et si les composantes de $\overrightarrow{y}$ dans cette base sont $(1,0,-1)$, déterminer le produit vectoriel $\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}$.

Solution. Puisque $\overrightarrow{x}=2\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}+3\overrightarrow{u_3}$, ses composantes dans cette base sont $(2,-1,3)$. Dès lors, le produit vectoriel $\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}$ est un vecteur dont les composantes sont $(1,5,1)$.
Ainsi, $\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}=\overrightarrow{u_1}+5\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_3}$.

Corrigé du test 2 du 15-10-2015

1. **Décrire analytiquement l'ensemble A borné fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées.**



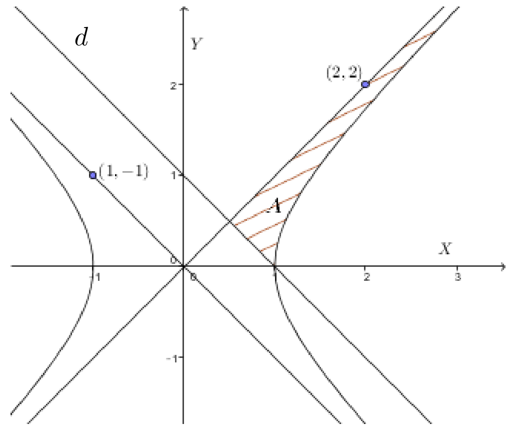
Solution. La parabole, d'intersection avec X en $(1,0)$ et passant par le point $(2,1)$, a pour équation cartésienne $x-1=y^2$. La partie de la parabole, correspondant aux ordonnées négatives, concernée par l'ensemble A a pour équation $y=-\sqrt{x-1}$.
Les droites d_1 et d_2 ont respectivement pour équation cartésienne $y=x-1$ et $y=\dfrac{-x}{2}$. L'abscisse du point d'intersection entre ces deux droites est le réel $\dfrac{2}{3}$, zéro de l'équation $x-1=\dfrac{-x}{2}$.
L'abscisse du point d'intersection entre la parabole et la droite d'équation d_2 est le réel 2, donné dans l'énoncé. Dès lors, l'ensemble A fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in\left[\frac{2}{3},1\right],\ y\in\left[\frac{-x}{2},x-1\right]\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[1,2],\ y\in\left[\frac{-x}{2},-\sqrt{x-1}\right]\right\}.$$

2. **On fixe une base orthonormée de l'espace, notée $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$.**
Si $\overrightarrow{x}=-\overrightarrow{u_2}+3\overrightarrow{u_3}$ et si les composantes de $\overrightarrow{y}$ dans cette base sont $(1,0,-1)$, déterminer le produit vectoriel $\overrightarrow{x}\wedge 2\overrightarrow{y}$.

Solution. Puisque $\overrightarrow{x}=-\overrightarrow{u_2}+3\overrightarrow{u_3}$, ses composantes dans cette base sont $(0,-1,3)$. Celles de $2\overrightarrow{y}$ dans cette base sont $(2,0,-2)$. Dès lors, le produit vectoriel $\overrightarrow{x}\wedge 2\overrightarrow{y}$ est un vecteur dont les composantes sont $(2,6,2)$. Ainsi, $\overrightarrow{x}\wedge 2\overrightarrow{y}=2\overrightarrow{u_1}+6\overrightarrow{u_2}+2\overrightarrow{u_3}$.

Corrigé du test 2 du 16-10-2015



1. **Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.**

Solution. L'hyperbole intersecte l'axe X en $(-1,0)$ et $(1,0)$. Les droites, asymptotes obliques de l'hyperbole, ont pour équation cartésienne $y = x$ et $y = -x$. L'équation cartésienne de cette hyperbole est donc $x^2 - y^2 = 1$. La partie de l'hyperbole, correspondant aux abscisses positives, concernée par l'ensemble A a pour équation $x = \sqrt{1+y^2}$. La droite d a pour équation $y = -x+1 \Leftrightarrow x = -y+1$. L'ordonnée du point d'intersection entre cette droite et l'asymptote d'équation $y = x$ est le réel $\frac{1}{2}$, zéro de l'équation $y = -y+1$.

Dès lors, l'ensemble A fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[0, \frac{1}{2}\right],\ x \in \left[-y+1, \sqrt{1+y^2}\right]\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[,\ x \in \left[y, \sqrt{1+y^2}\right]\right\}.$$

2. **On fixe une base orthonormée de l'espace, notée $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$. Si $\overrightarrow{x} = -\overrightarrow{u_1} + 3\overrightarrow{u_3}$ et si les composantes de $\overrightarrow{y}$ dans cette base sont $(-1,1,-1)$, déterminer le produit vectoriel $\overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{x}$.**

Solution. Puisque $\overrightarrow{x} = -\overrightarrow{u_1} + 3\overrightarrow{u_3}$, ses composantes dans cette base sont $(-1,0,3)$. Dès lors, le produit vectoriel $\overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{x}$ est un vecteur dont les composantes sont $(3,4,1)$. Ainsi, $\overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{x} = 3\overrightarrow{u_1} + 4\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$.