1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématique : corrigé du test 3

Version 20 octobre 2015

Corrigé du test 3 du 26-10-2015

1. **Décomposer la fraction rationnelle suivante en fractions rationnelles simples à coefficients réels**
$$F(x)=\frac{x^2+8}{x^3+4x}$$

Solution. La fraction donnée est propre et son dénominateur se factorise sous la forme $x(x^2+4)$; elle est donc définie sur $\mathbb{R}_0$. On sait qu'il existe des réels uniques A, B et C tels que

$$F(x)=\frac{x^2+8}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4},\quad x\in\mathbb{R}_0.$$

Cette égalité est équivalente à

$$\frac{x^2+8}{x(x^2+4)}=\frac{A(x^2+4)+(Bx+C)x}{x(x^2+4)},\quad x\in\mathbb{R}_0,$$

ou encore à $x^2+8=A(x^2+4)+(Bx+C)x,\quad x\in\mathbb{R}_0$, puisque ces fractions égales ont même dénominateur. Vu les propriétés des polynômes, on obtient aussi $x^2+8=A(x^2+4)+(Bx+C)x$ pour tout x réel ou encore $x^2+8=(A+B)x^2+Cx+4A,\ x\in\mathbb{R}$. Vu les propriétés des polynômes, cette relation est équivalente au système

$$\left\{\begin{array}{l}A+B=1\\ C=0\\ 4A=8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}A=2\\ B=-1\\ C=0\end{array}\right.$$

Dès lors,
$$F(x)=\frac{x^2+8}{x(x^2+4)}=\frac{2}{x}-\frac{x}{x^2+4},\quad x\in\mathbb{R}_0.$$

2. **Soit f une fonction définie sur A partie de $\mathbb{R}$.**
a) Quand peut-on dire que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ est envisageable ?
b) Si c'est possible, donner un exemple d'ensemble A ne comprenant pas 2 pour lequel la limite est envisageable.
c) Si la limite est envisageable, donner la définition en "ε,η" (donc pas à partir des suites) de
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=-\infty.$$

Solution.
a) La limite est envisageable si le réel 2 est tel que tout intervalle ouvert auquel il appartient rencontre $A\cap]2,+\infty[$.
b) On peut, par exemple, considérer l'ensemble $]2,\alpha[$ où α est un réel ou $+\infty$.
c) La notation $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$ se traduit en symboles mathématiques par

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0\quad\text{tel que}\quad \left.\begin{array}{l}0<x-2\leq\eta\\ x\in A\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)\leq-\varepsilon.$$

Corrigé du test 3 du 27-10-2015

1. **Décomposer la fraction rationnelle suivante en fractions rationnelles simples à coefficients réels**
$$F(x)=\frac{2x-1}{8x^3+2x}$$

Solution. La fraction donnée est propre et son dénominateur se factorise sous la forme $2x(4x^2+1)$; elle est donc définie sur $\mathbb{R}_0$. On sait qu'il existe des réels uniques A, B et C tels que
$$F(x)=\frac{2x-1}{2x(4x^2+1)}=\frac{A}{2x}+\frac{Bx+C}{4x^2+1},\quad x\in\mathbb{R}_0.$$
Cette égalité est équivalente à
$$\frac{2x-1}{2x(4x^2+1)}=\frac{A(4x^2+1)+(Bx+C)2x}{2x(4x^2+1)},\quad x\in\mathbb{R}_0,$$
ou encore à $2x-1=A(4x^2+1)+(Bx+C)2x,\ x\in\mathbb{R}_0$, puisque ces fractions égales ont même dénominateur. Vu les propriétés des polynômes, on obtient aussi $2x-1=A(4x^2+1)+(Bx+C)2x$ pour tout x réel ou encore $2x-1=(4A+2B)x^2+2Cx+A,\ x\in\mathbb{R}$. Vu les propriétés des polynômes, cette relation est équivalente au système
$$\left\{\begin{array}{l}4A+2B=0\\ 2C=2\\ A=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}A=-1\\ B=2\\ C=1\end{array}\right.$$
Dès lors,
$$F(x)=\frac{2x-1}{2x(4x^2+1)}=\frac{-1}{2x}+\frac{2x+1}{4x^2+1},\quad x\in\mathbb{R}_0.$$

2. **Soit f une fonction définie sur A partie de $\mathbb{R}$.**
a) Quand peut-on dire que $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ est envisageable ?
b) Si c'est possible, donner un exemple d'ensemble A pour lequel la limite est envisageable.
c) Si la limite est envisageable, donner la définition en "ε,η" (donc pas à partir des suites) de
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-5.$$

Solution.
a) La limite est envisageable si l'ensemble A n'est pas minoré.
b) On peut, par exemple, considérer l'ensemble $]-\infty,\alpha[$ où α est un réel ou $+\infty$.
c) La notation $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-5$ se traduit en symboles mathématiques par
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0\quad\text{tel que}\quad\left.\begin{array}{l}x\le-\eta\\ x\in A\end{array}\right\}\Rightarrow|f(x)+5|\le\varepsilon.$$