Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématique : corrigé du test 4

Version 21 novembre 2015

Corrigé du test 4 du 19-11-2015

1. **Si c'est possible, calculer la limite suivante** $\lim_{x\to 0^+}(-3x)\ln(x)$.

   Solution. La fonction $f : x \mapsto (-3x)\ln(x)$ est définie sur
   $$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[.$$
   Puisque tout intervalle ouvert contenant 0 rencontre $A \cap]0, +\infty[=]0, +\infty[$, la limite est envisageable.

   On a $\lim_{x\to 0^+}((-3x)\ln x) = -3 \lim_{x\to 0^+}(x.\ln x)$. De plus, $\lim_{x\to 0^+} x = 0^+$ et $\lim_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty$. Pour lever l'indétermination $0 \,.\, \infty$, on utilise le théorème de l'Hospital si les hypothèses sont vérifiées, en considérant la fonction sous la forme $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^{-1}}$.

   En effet, si $V =]0, \varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$ assez petit), on a
   1) $h : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto x^{-1}$ fonctions dérivables dans V
   2) $Dg(x) = -x^{-2} \neq 0$ dans V
   3) $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty$
   4) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{Dh(x)}{Dg(x)} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$

   Dès lors, $\lim_{x\to 0^+}(x.\ln x) = 0^-$, donc $\lim_{x\to 0^+}((-3x)\ln x) = 0^+$.

2. **Primitiver la fonction f suivante en spécifiant l'intervalle sur lequel on travaille**
   $$f : x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}.$$
   Solution. La fonction $f : x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}$ est continue sur
   $$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 - 4x^2 > 0\} = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[;$$
   elle y est donc primitivable. Par une primitivation par substitution, on a successivement
   $$\begin{aligned}
   \int \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx &= -\frac{1}{4}\int (-8x)\,.\,(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx \\
   &= -\frac{1}{4}\int D(1-4x^2)\,.\,(1-4x^2)^{\frac{-1}{2}}dx \\
   &\simeq \frac{-1}{4}\left[\int t^{\frac{-1}{2}}\,dt\right]_{t=1-4x^2} \\
   &\simeq \frac{-1}{4}\left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_{t=1-4x^2} \\
   &\simeq \frac{-\sqrt{1-4x^2}}{2},\ x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[.
   \end{aligned}$$

Corrigé du test 4 du 20-11-2015

1. **Si c'est possible, calculer la limite suivante** $\lim_{x\to 0^+}(x.\mathrm{cotg}(x))$.

   Solution. La fonction $f : x \mapsto x.\mathrm{cotg}(x))$ est définie sur
$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$
   Puisque tout intervalle ouvert contenant 0 rencontre $A \cap]0, +\infty[$, la limite est envisageable.
   On a $\lim_{x\to 0^+} x = 0^+$ et $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{cotg}(x) = +\infty$. Pour lever l'indétermination $0\ .\ \infty$, on utilise le théorème de l'Hospital si les hypothèses sont vérifiées, en considérant la fonction sous la forme $x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{tg}(x)}$.

   En effet, si $V =]0, \varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$ assez petit), on a
   1) $h : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto \mathrm{tg}(x)$ fonctions dérivables dans V
   2) $Dg(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \neq 0$ dans V
   3) $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$
   4) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{Dh(x)}{Dg(x)} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \lim_{x\to 0^+} \cos^2(x) = 1.$

   Dès lors, $\lim_{x\to 0^+}(x.\mathrm{cotg}(x)) = 1$.

2. **Primitiver la fonction f suivante en spécifiant l'intervalle sur lequel on travaille**
$$f : x \mapsto \frac{\ln(x^3)}{x}$$
   Solution. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x^3)}{x}$ est continue sur
$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 > 0,\ x \neq 0\} =]0, +\infty[;$$
   elle est donc primitivable sur $]0, +\infty[$.
   Vu la propriété des puissances naturelles des logarithmes de réels strictement positifs, par une primitivation par substitution, on a successivement
$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(x^3)}{x}dx &= \int \frac{3\ln(x)}{x}dx \\
&= 3\int \frac{1}{x}\ .\ \ln(x)\ dx \\
&= 3\int D(\ln(x)).\ln(x)dx \\
&\simeq 3\left[\int t\ dt\right]_{t=\ln(x)} \\
&\simeq 3\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=\ln(x)} \\
&\simeq \frac{3}{2}\ln^2(x),\ x \in]0, +\infty[.
\end{aligned}$$