
Université
de Liège



1, 2, 3...Sciences

Année académique 2015-2016

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
EXERCICES DE RÉVISION EN VUE DE L'INTERROGATION DU 9/11/2015

Problèmes élémentaires

1. Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente de $1/15$. Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir $3,36 \text{ m}^3$ de glace ?
2. Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient un point. S'il ne répond pas, il a 0 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il ne répond pas à 13 questions et qu'il obtient 45,75 comme cote finale, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?
3. Un tonneau rempli aux trois cinquièmes d'eau pèse 125 kg. Rempli aux trois quarts d'eau, il pèse 137 kg. Quelle est la capacité en hectolitres de ce tonneau ?

Manipulations de réels

Résoudre les équations et inéquations suivantes (x est une inconnue réelle)

1. $|4x^2 - 1| = |3x|$
2. $x^2 - 9 \geq 3x|x - 3|$
3. $x \geq 27x^4$
4. $|x - 3| \geq |x + 3|$
5. $(3 - x)^2 \leq x - 3$
6. $x|x^2 - 9| \leq 4|x - 3|$
7. $\frac{|3 - x|}{x^2 - 9} \geq |x - 3|$
8. $|x^2 - 9| \geq 5$
9. $\frac{1}{|2x + 5|} > 3$

Calcul vectoriel et droites

1. Dans un repère orthonormé, on donne les droites d_1 , d_2 et d_3 dont les équations cartésiennes sont

$$d_1 : 2x - y + 3 = 0 \quad d_2 : 5x + 2y - 12 = 0 \quad d_3 : x + 4y - 24 = 0.$$

- (a) Représenter ces 3 droites.
 - (b) Les droites d_1 et d_2 se coupent au point A . Déterminer l'équation cartésienne de la droite d passant par A et orthogonale à d_3 .
 - (c) Donner des équations paramétriques de d_3 .
 - (d) Déterminer les coordonnées du point B d'intersection de la droite d_2 avec l'axe des abscisses.
 - (e) Le point C de coordonnées $(4, 5)$ appartient-il à d_1 ? à d_2 ? à d_3 ?
 - (f) Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BC}$.
 - (g) Déterminer les composantes de la projection orthogonale de \overrightarrow{AB} sur d_1 .
2. Dans un repère orthonormé, on donne les points A , B et C dont les coordonnées cartésiennes sont respectivement

$$(-1, 1, 0) \quad (2, -1, 3) \quad (0, -4, 2).$$

Déterminer les composantes du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge 2\overrightarrow{BC}$

Trigonométrie

1. Si α désigne un réel de l'intervalle $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ et si $\text{tg}(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, que valent les nombres $\text{cotg}(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$?
2. Simplifier $\frac{\cos(\frac{4\pi}{3})}{\sin^2(\frac{7\pi}{3})}$.

3. Résoudre dans $[\pi, 2\pi]$ (x est une inconnue réelle)

- (a) $\sin(2x) \cos(2x) = -1$
- (b) $4 \sin(2x) \cos(2x) = -1$
- (c) $\sin(2x) = \sin(6x)$
- (d) $4 \cos^2(2x) = 3$
- (e) $2 \cos^2(2x) = \sin^2(4x)$
- (f) $\sin(x) \sin(2x) = \cos(2x) \cos(x) + \frac{1}{2}$

Coniques et représentations d'ensembles

1. On se place dans un repère orthonormé. Représenter le graphique des coniques suivantes, données par leur équation cartésienne. Comment s'appellent ces coniques? Quelles sont les coordonnées de leur(s) foyer(s)? Quelle est leur excentricité?

$$x^2 - 1 = 4y^2 \qquad x^2 + 3y^2 = 12.$$

2. Représenter dans un repère orthonormé en les hachurant les ensembles dont une description analytique est la suivante

$$A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + 4x \geq 0 \text{ et } y \leq 4 - x^2\}.$$
$$B = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y^2 - 1 \leq x \text{ et } 1 - y \leq x \leq y + 1\}.$$

Pour B donner une description analytique

- a) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées.
- b) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.

Nombres complexes

- 1. On donne le complexe $z = 1 + i$.
 - a) En déterminer le module et une forme trigonométrique. Le représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé ($X =$ "axe réel" et $Y =$ "axe imaginaire")
 - b) Que vaut la partie réelle du complexe z^2 ?
 - c) La partie imaginaire du carré d'un complexe est-elle toujours égale au carré de la partie imaginaire du complexe? Pourquoi?
- 2. Déterminer
 - a) le module du complexe $\cos(2) + i \sin(2)$
 - b) les parties réelle et imaginaire du complexe $z = \frac{1}{1-2i}$.
- 3. Résoudre dans \mathbb{C}

$$a) z^2 - z + 1 = 0 \qquad b) z^2 + 25 = 0$$

Limites

Si elles existent, déterminer les limites suivantes

- (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(ex + 3) - \ln(2x - 4))$
- (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{ex + 3}{2x - 4}\right)$
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg\left(\ln\left(\frac{x^2 + 3}{x - 1}\right)\right)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + x^3 - 7x^2 - 5x + 10}{-x^2 - x + 2}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|-x + 3|}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x - 1}}{-x + 3}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctg\left(\frac{1}{x^2}\right)$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 3} e^{\frac{2x}{-x+3}}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{2x}{-x+3}}$

Dérivées

Dans quel ensemble la fonction est-elle définie ? dérivable ? En déterminer la dérivée première si

(a) $f : x \mapsto \arcsin(\sqrt{2x+3})$

(b) $g : x \mapsto \arccos\left(\frac{-x-1}{x}\right)$