1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales (partim B)

Révisions en vue de l'interrogation du 11 avril 2016 : correction

Version 14 mars 2016

Répétition 8 : correction des exercices de révision

1. **La matrice** $M = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **est-elle diagonalisable ? Pourquoi ?**

   Si oui, en déterminer une forme diagonale Δ ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.

   La matrice M possède 3 valeurs propres simples ($-i,\ i$ et 1) ; M est donc diagonalisable.

   On a, par exemple, $\Delta = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. **Soient les matrices A et B données par**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i^3 \\ 0 & i & 0 \\ \frac{1}{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^* = \begin{pmatrix} 2i & i & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Si possible, effectuer les opérations suivantes et simplifier la réponse au maximum :

   1) $A + \widetilde{B}$ **2)** $C = AB$ **3)** C^{-1}

   Les matrices étant carrées et de même dimension, on peut calculer $A + \widetilde{B}$ et $C = AB$. On a

$$A + \widetilde{B} = \begin{pmatrix} -2i & -i & i \\ 0 & 2i & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Comme $\det(C) = -2i \neq 0$, la matrice C^{-1} existe et on a

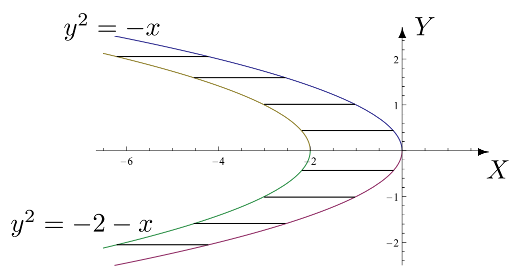
$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. **On donne la fonction f par**

$$f : (x, y) \mapsto f(x, y) = \arcsin(y^2 + x + 1)$$

   (a) **Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.**

   La fonction f est infiniment dérivable sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y^2 + x + 1 < 1\}$. Les points de l'ensemble sont représentés par la partie hachurée du plan, les points des paraboles étant exclus.



   (b) **Calculer la dérivée de f par rapport à sa deuxième variable.**

   La dérivée de f par rapport à sa deuxième variable est donnée par

$$(D_y f)(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{1 - (y^2 + x + 1)^2}}.$$

(c) **Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(5t^2 - 1, 2t)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.**

La fonction F est la fonction $t \mapsto F(t) = \arcsin(9t^2)$; son domaine de dérivabilité est l'ensemble $\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$ et sa dérivée est donnée par $DF(t) = \dfrac{18t}{\sqrt{1-81t^4}}$.

(d) **Si F est dérivable en $1/6$, que vaut sa dérivée en ce point ? Simplifier votre réponse au maximum.**

La dérivée de F en $1/6$ vaut $\dfrac{4\sqrt{15}}{5}$.

4. **On donne la fonction f continûment dérivable sur $]1,2[\times]0,1[$ et à valeurs strictement positives.**

(a) **Déterminer le domaine de dérivabilité de $g : x \mapsto \ln(f(\sqrt{x}, \ln(3-x)))$.**

La fonction g est dérivable sur $]1,2[$.

(b) **Calculer la dérivée de g en fonction de f et de ses dérivées partielles.**

La dérivée de g est donnée par

$$Dg(x) = \frac{1}{f(\sqrt{x}, \ln(3-x))}\left[(D_u f)(\sqrt{x}, \ln(3-x)).\frac{1}{2\sqrt{x}} + (D_v f)(\sqrt{x}, \ln(3-x)).\left(\frac{-1}{3-x}\right)\right]$$

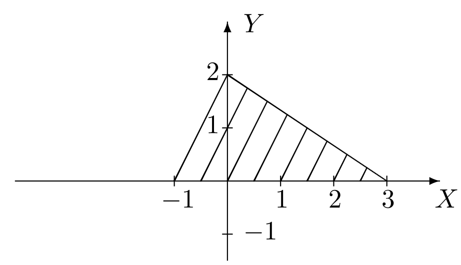
si u et v sont respectivement la première et la deuxième variable de f.

(c) **Si g est dérivable en $5/2$, que vaut sa dérivée en ce point ?**

La fonction g n'est pas dérivable en $5/2$ car $5/2 \notin]1,2[$.

5. **On donne l'ensemble fermé hachuré A suivant. Déterminer**

$$\iint_A y\, e^{y-2x} dx\, dy.$$



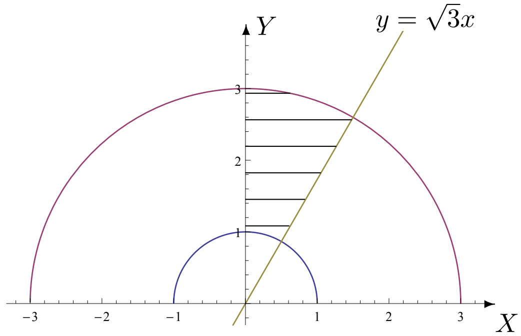
La fonction $f : (x,y) \mapsto ye^{y-2x}$ est continue sur le fermé borné A ; elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\iint_A ye^{y-2x} dx\, dy = \frac{25e^8 - 1}{32e^6}.$$

6. **Calculer, si possible l'intégrale suivante**

$$\iint_A \frac{x}{y} dxdy,$$

où A est l'ensemble fermé hachuré ci-dessous.



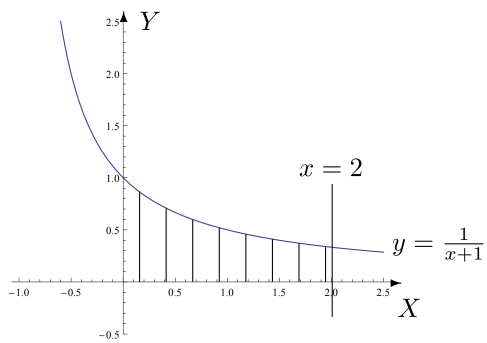
La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ est continue sur le fermé borné A ; elle est donc intégrable sur cet ensemble et, en passant aux coordonnées polaires, on obtient

$$\iint_A \frac{x}{y}\ dxdy = \int_1^3 \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} r\,\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\ d\theta \right) dr = -4\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

7. **La fonction f étant supposée intégrable, permuter l'ordre d'intégration après avoir représenté l'ensemble d'intégration si**

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{1}{x+1}} f(x,y)\ dy \right)\ dx.$$

Voici la représentation graphique de l'ensemble d'intégration



En permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$I = \int_0^{1/3} \left(\int_0^2 f(x,y)\,dx \right) dy + \int_{1/3}^1 \left(\int_0^{(1/y)-1} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

8. **Soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < 0\}$. Calculer, si possible, les intégrales suivantes et représenter leurs ensembles d'intégration.**

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{x^2 y}{(4x^2+y^2)^2} dx \right) dy$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\int_{-x^2}^{-x} \frac{y\,e^{2x}}{x^2}\ dy \right) dx$ c) $\displaystyle\iint_C \sin(x-y)\,e^x\ dx\ dy$

a) La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{(4x^2+y^2)^2}$ est continue et positive sur l'ensemble d'intégration A (ensemble hachuré ci-dessous) dont on exclut $(0, 0)$. Comme on peut vérifier facilement son intégrablilité après permutation de l'ordre d'intégration, la fonction est donc intégrable sur A et on a

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{x^2 y}{(4x^2+y^2)^2} dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{x^2 y}{(4x^2+y^2)^2} dy \right) dx = \frac{1 - 2\ \mathrm{arctg}(1/2)}{8}.$$

b) La fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{y\ e^{2x}}{x^2}$ est continue et négative sur l'ensemble d'intégration B (ensemble hachuré ci-dessous) non borné. En vérifiant son intégrabilité sur B, on constate qu'elle n'y est pas intégrable.

c) La fonction $f : (x,y) \mapsto \sin(x-y)\, e^x$ est continue sur l'ensemble d'intégration C (ensemble hachuré ci-dessous) non borné fermé. En majorant $|\sin(x-y)|$ par 1 et en appliquant le critère de comparaison, on prouve que f est intégrable sur C. Dès lors, en effectuant l'intégrale, on obtient

$$\iint_C \sin(x-y)\, e^x \ dx\ dy = \int_{-\infty}^{0} \left(\int_x^0 \sin(x-y)\, e^x \ dy \right) dx = -\frac{1}{2}.$$