1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématique (partim B)

Correction des listes d'exercices du 2ème quadrimestre : Biologie

Version 25 janvier 2016

Liste 1 : calcul matriciel (1)

I. Opérations entre matrices

1. **Soient les matrices A, B, C données par**

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1+i & -1 \\ \frac{3}{i} & (2-i)^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ i & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{i+1} \\ -2i & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$1)\ A+B,\ 2)\ A+\widetilde{B},\ 3)\ A.B,\ 4)\ A.B+C,\ 5)\ B.A,\ 6)\ C.\widetilde{A},\ 7)\ A^*.C,\ 8)\ i.C,\ 9)\ (i.A)^*.$$

1) $A+B$ est impossible à calculer car les matrices n'ont pas le même format.

2) $A+\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2+i & -2i \\ i & 3 & 1-4i \end{pmatrix}$

3) $A.B = \begin{pmatrix} 8+i & 4+10i \\ 3+5i & -10+8i \end{pmatrix}$

4) $A.B+C = \begin{pmatrix} 11+i & \frac{9+19i}{2} \\ 3+3i & \frac{-20+17i}{2} \end{pmatrix}$

5) $B.A = \begin{pmatrix} 4 & 2+2i & -6i \\ 2+4i & -3+i & 12-19i \\ 0 & 1+i & -3+8i \end{pmatrix}$

6) $C\widetilde{A}$ est impossible à calculer car le nombre de colonnes (2) de C n'est pas égal au nombre de lignes (3) de $\widetilde{A}$.

7) $A^*C = \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2}-i \\ 3-i & -\frac{3i}{2} \\ 8+3i & \frac{-1+6i}{2} \end{pmatrix}$

8) $iC = \begin{pmatrix} 3i & \frac{1+i}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

9) $(iA)^* = \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ -1-i & i \\ 3 & 4-3i \end{pmatrix}$

2. **Soit A une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{ij} = 1, \forall i,j$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.**

Calculer $C = AB - BA$ et en déduire la forme de $\widetilde{C} + C$.

On a $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{C} + C$ est la matrice nulle de dimension 3.

3. **On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 2A + 3I = 0$.**

4. **Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.**

La forme générale des matrices qui commutent avec A est du type $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$.

II. Déterminants

1. **Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.**

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-i & 3i \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ (i+1)^2 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}\ D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de A vaut $\frac{1}{9}(8-i)$, celui de B vaut 1, celui de C vaut 90 et celui de D vaut $-\frac{7}{2}$.

2. **Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en $x \in \mathbb{C}$. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.**

$$A = \begin{pmatrix} 1-x & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2-x \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} i & x+2 \\ -x & -i \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} x & -4 \\ 1 & x \end{pmatrix}.\ D = \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 0 & x+1 & x \\ 1 & 0 & x-2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est égal à $\left(x - \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$; celui de B est égal à $(x+1)^2$, celui de C vaut $(x+2i)(x-2i)$ et celui de D $(x+1)^2(x-3)$.

III. Inversion de matrices

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- L'inverse de A est $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- La matrice B ne possède pas d'inverse car son déterminant est nul.
- La matrice C est égale à son inverse.
- L'inverse de D est $\frac{1+i}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ i & i & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Liste 2 : calcul matriciel (2)

I. Diagonalisation

1. **Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en donner la multiplicité.**

$$A = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $-1+i$ et $1+i$; ces valeurs propres sont simples (de multiplicité 1).
Les valeurs propres de la matrice B sont 2 (valeur propre double) et 3 (valeur propre simple).
Les valeurs propres de la matrice C sont $-4,\ 1$ et 3 ; ces valeurs propres sont simples.

2. **Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale Δ, ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits AS et $S\Delta$. Comparer les matrices obtenues. N'aurait-on pas pu prévoir ce resultat sans effectuer les calculs ? Pourquoi ?

• Matrice A : 2 valeurs propres simples : -2 et 5 ; la matrice est donc diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont du type $c\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$ et ceux relatifs à la valeur propre 5 sont du type $c'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.
On a, par exemple, $\Delta = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ si on note A la matrice donnée.
Dès lors, en effectuant les produits, on a $AS = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = S\Delta$. Comme A est diagonalisable, on a $\Delta = S^{-1}AS \Leftrightarrow S\Delta = AS$ en multipliant les deux membres à gauche par S.

• Matrice B : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double -1.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -1 sont du type $c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.
Comme cette valeur propre n'engendre pas 2 vecteurs propres linéairement indépendants, la matrice n'est pas diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.

• Matrice C : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double -1.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -1 sont du type $c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls. Cette matrice est donc diagonalisable car elle possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

On a, par exemple, $S^{-1}CS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ si on note A la matrice donnée.

3. **Une matrice carrée A de dimension 2 possède les deux valeurs propres 1 et -1, auxquelles peuvent être associés respectivement les vecteurs propres $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Que vaut A ?**

   La matrice A est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

II. Divers

1. **L'institut météorologique a fait les observations suivantes :**
   - **on n'a jamais vu deux jours ensoleillés consécutifs,**
   - **s'il fait beau un jour donné, on a une chance égale d'avoir de la pluie ou de la neige le lendemain,**
   - **s'il pleut ou s'il neige, on a une chance sur deux que le temps se maintienne le jour suivant et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.**

   Sachant cela,

   (a) **Représenter la matrice de transition de ce système.**

   (b) **Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quel pourcentage de chance a-t-on qu'il fasse beau dans deux jours ?**

   (c) **A long terme, quelle sera l'évolution du climat ?**

   (a) Si on note N_0, P_0 et S_0 respectivement un jour de neige, un jour de pluie et un jour de soleil au départ et N_1, P_1 et S_1 la météo correspondante le jour suivant, on a

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ P_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ P_0 \\ S_0 \end{pmatrix}$$

   et la matrice de dimension 3 est la matrice de transition du système.
   (b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, on a 25 % de chance qu'il fasse beau dans 2 jours.

(c) Le vecteur de probabilité de valeur propre 1 est égal à $\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,2 \end{pmatrix}$. A long terme, on 4 chances sur 10 qu'il neige ou qu'il pleuve et 2 chances sur 10 qu'il fasse ensoleillé.

2. **Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.**
L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 70 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 10.
S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 6 fois sur 10 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.
Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.
   (a) **Si un lapin vient de manger des carottes, quelle est la probabilité qu'il mange de la salade dans deux repas ?**
   (b) **A longue échéance, que mange ce lapin ?**

   (a) La probabilité pour que le lapin mange de la salade dans 2 repas vaut $0,3$.
   (b) A longue échéance, le lapin mange des carottes ou de la salade avec une probabilité de $2/5$, des pissenlits avec une probabilité de $1/5$.

3. **En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle θ) est représentée par une matrice du type**

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où θ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).

– **Pour tout θ, déterminer la matrice produit M_θ^2 et en simplifier les éléments au maximum.**
  On a
$$M_\theta^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

– **Montrer que quels que soient θ, θ', les matrices M_θ et $M_{\theta'}$ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?**
  On a
$$M_\theta M_{\theta'} = M_{\theta'} M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$
  ce qui signifie que l'ordre dans lequel on effectue les rotations n'a pas d'importance.

– **Montrer que quel que soit le réel θ, la matrice**
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
  est aussi une matrice qui représente une rotation.

On a

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$

C'est donc aussi une matrice de rotation mais la rotation s'effectue dans le sens inverse de la rotation d'angle θ.

4. **Vrai ou faux (Justifier)**

   (a) **Toute matrice carrée de dimension 3 commute avec** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**.**

   Faux : si on multiplie la matrice donnée notée A à gauche et à droite par une matrice quelconque notée B du type $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ dont les élements sont des complexes quelconques, on a, par exemple, que la troisième ligne de AB est le vecteur nul alors que la troisième ligne de BA a pour premier élément g.

   (b) **La matrice** $\begin{pmatrix} a-b & a^2-ab+b^2 \\ a^2-b^2 & a^3-b^3 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$ **est inversible.**

   Faux car le déterminant de cette matrice vaut 0 si $a = b$ ou si $b = 0$.

   (c) **Si une matrice carrée A de dimension 2 est de déterminant nul, alors l'une des colonnes de A est multiple de l'autre.**

   Vrai (cf. théorie)

   (d) **Si deux lignes d'une matrice carrée A de dimension 3 sont identiques, alors** $\det A = 0$**.**

   Vrai (cf. théorie)

   (e) **Si A est une matrice carrée de dimension 3, alors** $\det(5A) = 5 \det A$**.**

   Faux : $\det(5A) = 5^3 \det A = 125 \det A$

   (f) **Si B est la matrice obtenue en multipliant la ligne 3 d'une matrice carrée A de dimension 3 par 5, alors** $\det B = 5 \det A$**.**

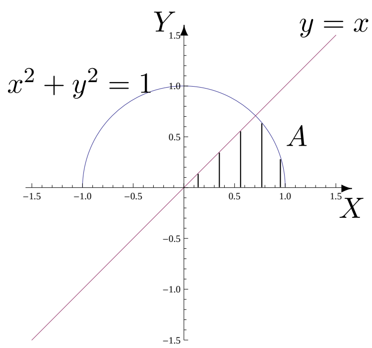
   Vrai (cf. théorie)

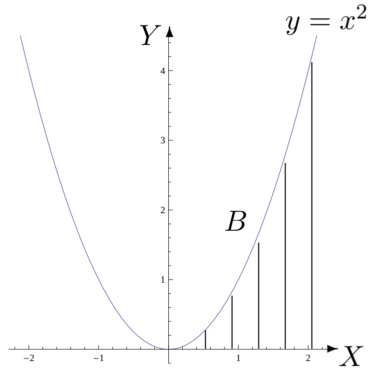
Liste 3 : compléments et Fonctions de plusieurs variables (1)

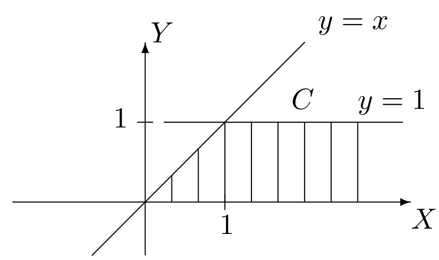
I. Représentation d'ensembles

1. **Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{1 - x^2}\}\}$
b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2\}$
c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y,\ y \in [0, 1]\}$

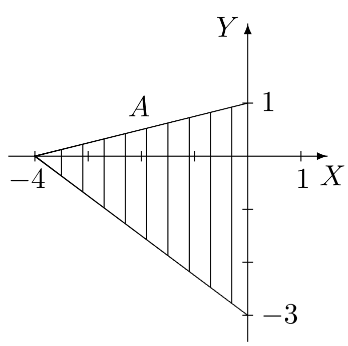


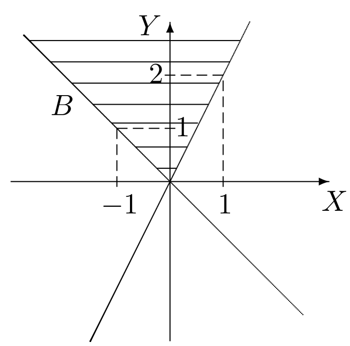


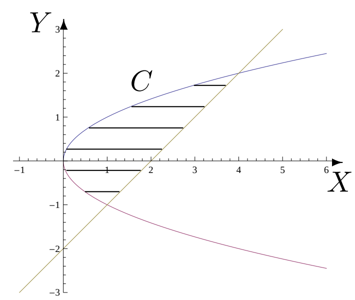


Les points des bords sont compris dans les ensembles.

2. **Décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble, en donnant d'abord**
a) l'ensemble de variation des abscisses
b) l'ensemble de variation des ordonnées.







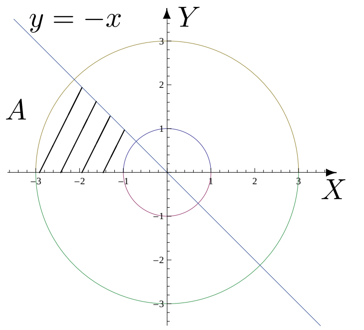
Les descriptions analytiques sont les suivantes
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-4, 0],\ y \in [-\frac{3}{4}x - 3, \frac{x}{4} + 1]\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-3, 0],\ x \in [-\frac{4}{3}y - 4, 0]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1],\ x \in [4(y - 1),\ 0]\}$

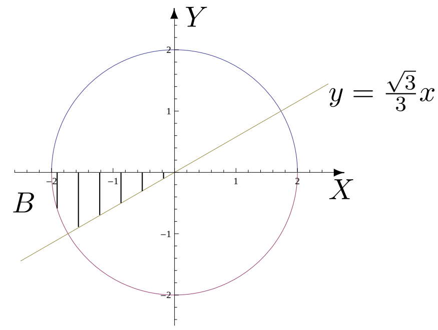
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, +\infty[,\ x \in [-y,\ \frac{y}{2}\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in\ ]-\infty, 0],\ y \in [-x, +\infty[\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\ +\infty[,\ y \in [2x,\ +\infty[\}$

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 2],\ x \in [y^2, y + 2]\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \in [-\sqrt{x}, \sqrt{x}]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,4],\ y \in [x-2, \sqrt{x}]\}.$

3. **En utilisant les coordonnées polaires, décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans A mais non dans B.**





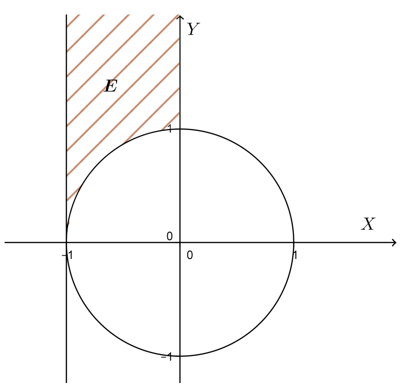
Les descriptions analytiques sont les suivantes

$$A = \left\{(r,\theta) : r \in [1,3],\ \theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{(r,\theta) : r \in]0,2[,\ \theta \in \left]\pi, \frac{7\pi}{6}\right[\right\}.$$

4. **Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est**

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 > 1\}.$$

Ensuite, décrire analytiquement cet ensemble en utilisant les coordonnées polaires.



Les points des bords sont exclus de l'ensemble.
L'ensemble E exprimé en coordonnées polaires est

$$E' = \left\{(r,\theta) : \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[,\ r \in \left]1, \frac{-1}{\cos(\theta)}\right[\right\}.$$

II. Définitions et représentations graphiques

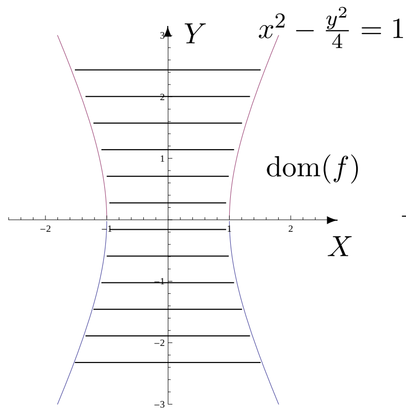
1. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.**

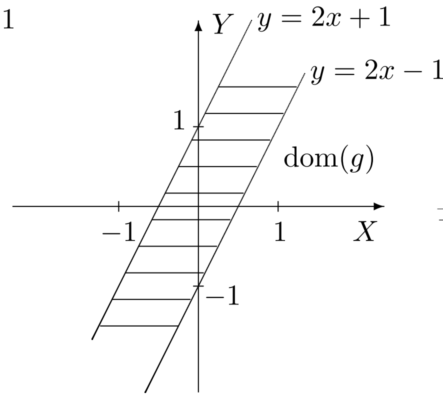
$$f(x,y) = \ln\left(\frac{y^2}{4} - x^2 + 1\right), \quad g(x,y) = \sqrt{1 - |2x - y|}, \quad h(x,y) = \text{arcos}(xy).$$

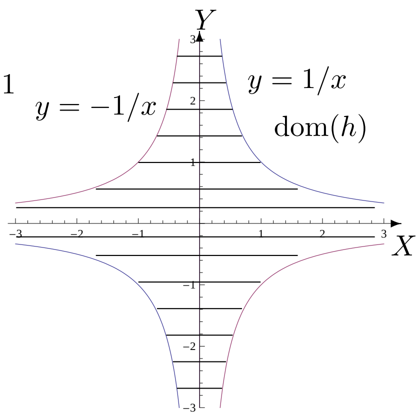
S'il appartient au domaine de définition, donner l'image de $(1/2, -1)$ par f, de $(1,2)$ par g et de $(2,1)$ par h. Dans un repère orthonormé de l'espace représenter ces points et leur image éventuelle.

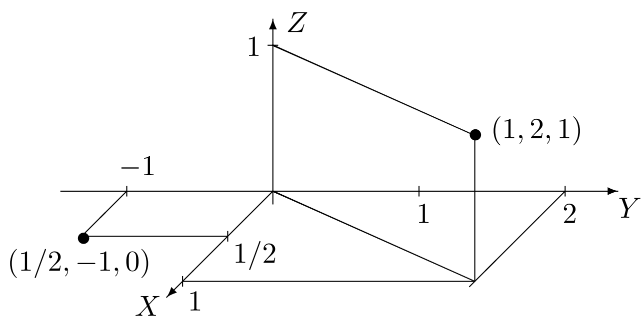
Les domaines de définition sont les suivants :

• $\text{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{4} - x^2 + 1 > 0\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points de l'hyperbole étant exclus de l'ensemble.
• $\text{dom}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq 2x - y \leq 1\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des droites sont compris dans l'ensemble.
• $\text{dom}(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xy \leq 1\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des hyperboles sont compris dans l'ensemble.
On a $f(1/2,-1) = 0$, $g(1,2) = 1$ et h n'est pas défini au point $(2,1)$.

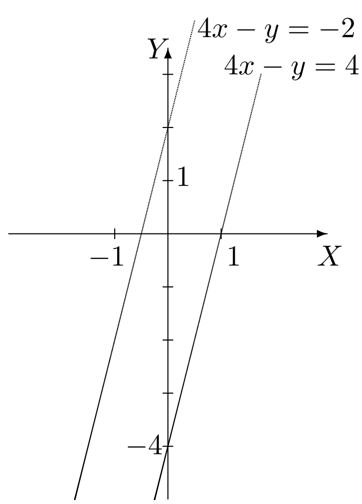


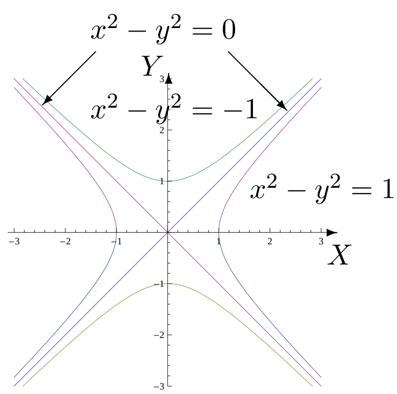


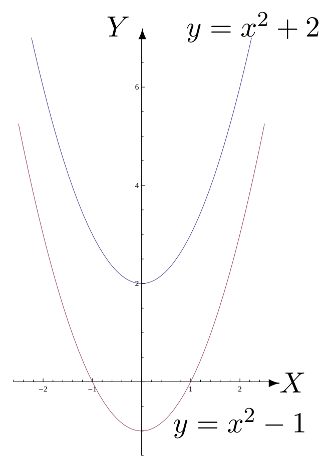




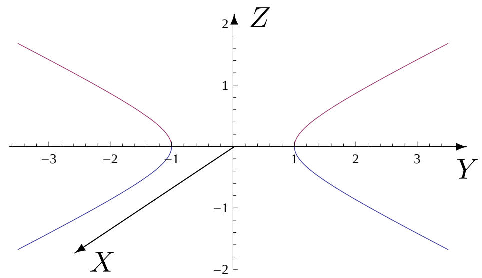
2. **Dans chacun des cas suivants, représenter les courbes de niveau d'équation** $f(x,y) = c$ **si**
a) $f(x,y) = 4x - y$ et $c = -2,\ 4$
b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ et $c = -1,\ 0,\ 1$
c) $f(x,y) = x^2 - y$ et $c = -2,\ 1$





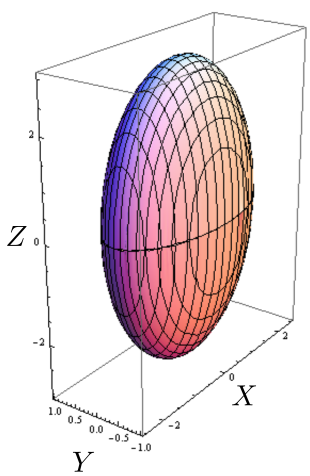


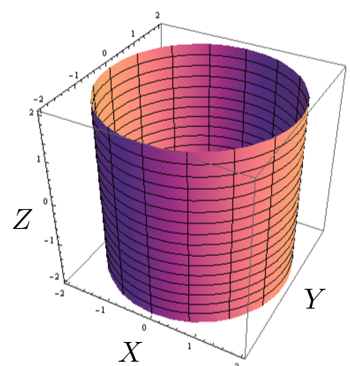
3. **On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les trois axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$ dans le plan d'équation $z = 0$ puis dans celui d'équation $x = 0$. Comment appelle-t-on chacune de ces courbes ? Quelle est la nature de cette quadrique ?**
La trace dans le plan d'équation $z = 0$ est le cercle centré à l'origine du repère et de rayon 1 ; celle dans le plan d'équation $x = 0$ est une hyperbole d'équation cartésienne $y^2 - 4z^2 = 1$(cf. graphique).
Cette quadrique est un hyperboloïde à une nappe.



4. **Esquisser les représentations graphiques des surfaces quadriques dont les équations cartésiennes sont**

$$a)\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \qquad\qquad b)x^2 + y^2 = 4.$$





III. Dérivation et gradient

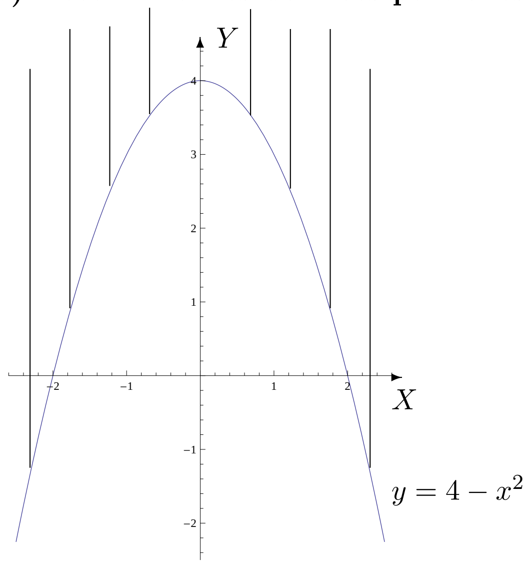
1. **En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction f donnée explicitement par $f(x, y) = 3x^2 + xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1, 2)$ et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.**
La fonction f est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1, 2)$ et sa dérivée partielle en ce point vaut -4.

2. **On donne les fonctions f, g et h par**

$$f(x, y) = \ln(x^2 - 4 + y), \quad g(x, y) = \cos(x^2y^2 + 4y) \quad \textbf{et} \quad h(x, y) = x^2\, e^{-\frac{x}{y}}.$$

a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.

b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.



Pour la fonction f, les 2 domaines sont égaux à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y - 4 > 0\}$. La représentation graphique de cet ensemble est la région hachurée, les points de la parabole étant exclus de l'ensemble. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x f(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y - 4}$$

et

$$D_y f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y - 4}.$$

Pour la fonction g, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2$: ce sont tous les points du plan. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x g(x,y) = -2xy^2 \sin(x^2y^2 + 4y) \qquad \text{et} \qquad D_y g(x,y) = -(2x^2y + 4)\sin(x^2y^2 + 4y).$$

Pour la fonction h, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0$: ce sont tous les points du plan sauf ceux de l'axe des abscisses. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x h(x,y) = \left(2x - \frac{x^2}{y}\right) e^{-\frac{x}{y}} \qquad \text{et} \qquad D_y h(x,y) = \frac{x^3}{y^2}\, e^{-\frac{x}{y}}.$$

3. **On donne la fonction f par $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 + 4y^2})$.**
   a) Déterminer son domaine de définition et d'infinie dérivabilité.
   b) Dans le domaine d'infinie dérivabilité, calculer $D_x^2 f + D_y^2 f$.

   Les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on a $D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y) = \dfrac{3(x^2 - 4y^2)}{(x^2 + 4y^2)^2}$.

4. **a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2\, x_2 \sin(3x_3)$.**
   b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x,y,z) = x^2 e^{xy^2\sqrt{z}}$.

   a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^3$ et son gradient est le vecteur de composantes

$$(2x_1x_2 \sin(3x_3),\ x_1^2 \sin(3x_3),\ 3x_1^2 x_2 \cos(3x_3)).$$

   b) La fonction g est dérivable sur $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ et son gradient est le vecteur de composantes

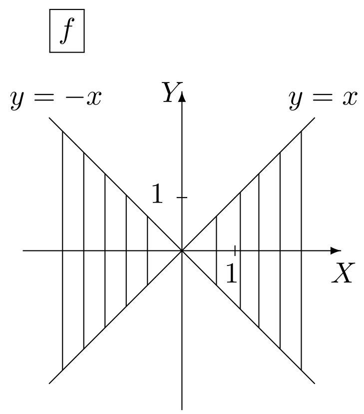
$$\left((2x + x^2y^2\sqrt{z})e^{xy^2\sqrt{z}},\ 2x^3y\sqrt{z}\, e^{xy^2\sqrt{z}},\ \frac{x^3y^2}{2\sqrt{z}}\, e^{xy^2\sqrt{z}}\right).$$

5. **On donne les fonctions f et g respectivement par**

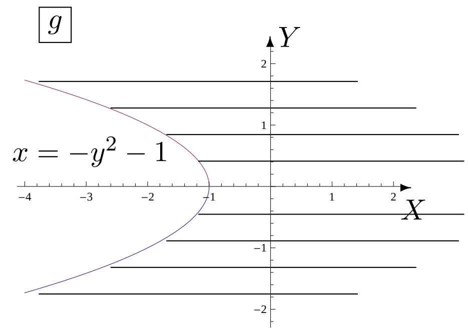
$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) \qquad g(x,y) = \exp(\sqrt{x+y^2+1}).$$

a) Déterminer le domaine de définition A et d'infinie dérivabilité B de ces fonctions. Représenter ces domaines.
b) Déterminer l'expression explicite de $|x|D_x f(x,y) + |y|D_y f(x,y)$.
c) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f\left(\frac{1}{t}, t\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
d) Déterminer l'expression explicite de $G(t) = g(\sin^2(t), \cos(t))$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.

a) Pour f, on a $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le \frac{y}{x} \le 1,\ x \neq 0\}$ et
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \tfrac{y}{x} < \ 1, x \neq 0\}.$$
Pour g, on a $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y^2+1 \ge 0\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y^2+1 > 0\}$.
Voici les représentations graphiques de ces ensembles (parties hachurées) :



Les points des droites sont compris dans A, sauf l'origine du repère.
Les points des droites sont exclus de B.



Les points de la parabole sont compris dans l'ensemble A mais non dans B.

b) On a

$$|x|D_x f(x,y) + |y|D_y f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad xy \ge 0 \\ \dfrac{-2y}{\sqrt{x^2-y^2}} & \text{si} \quad xy < 0 \end{cases}$$

c) L'expression explicite de $F(t) = f\left(\frac{1}{t}, t\right)$ est donnée par $F(t) = \arcsin(t^2)$; son domaine de dérivabilité est $]-1,1[$[1] et sa dérivée est

$$DF(t) = \frac{2t}{\sqrt{1-t^4}}.$$

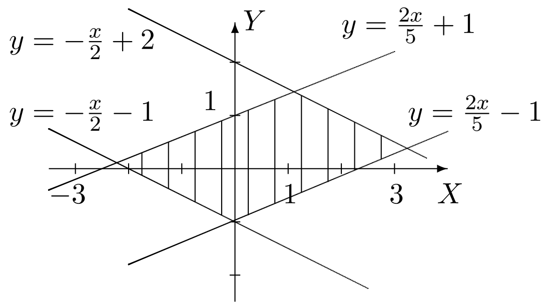
d) L'expression explicite de $G(t) = g(\sin^2(t), \cos(t))$ est donnée par $G(t) = \exp(\sqrt{2})$; son domaine de dérivabilité est $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $DG(t) = 0$.

1. Si on considère F comme fonction composée et non par son expression explicite, son domaine de dérivabilité est $]-1,1[\setminus\{0\}$.

Liste 4 : fonctions de plusieurs variables (2)

I. Dérivation des fonctions composées

1. **a) On donne f, continûment dérivable sur $]-2,4[\times]-5,5[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y) = f(x+2y, 2x-5y)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression de ses dérivées partielles en fonction de celles de f.**



Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x+2y < 4,\ -5 < 2x-5y < 5\}$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des droites étant exclus de l'ensemble.

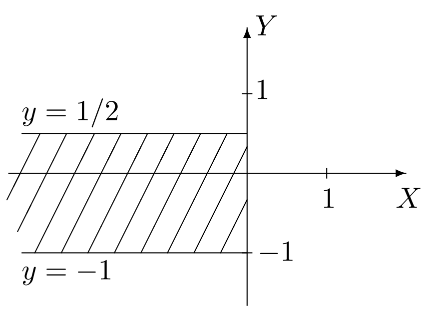
Les dérivées partielles sont

$$(D_xF)(x,y) = (D_uf)(x+2y, 2x-5y).1 + (D_vf)(x+2y, 2x-5y).2$$

$$(D_yF)(x,y) = (D_uf)(x+2y, 2x-5y).2 + (D_vf)(x+2y, 2x-5y).(-5)$$

où u et v sont respectivement les première et deuxième variables de f.

b) Même question pour g, continûment dérivable sur $]0,1[\times]\ln\frac{\pi}{3}, +\infty[$ et $G(x,y) = g(\exp(x),\ \ln(\arccos(y)))$.



Le domaine de dérivabilité de G est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0,\ y \in]-1, 1/2[\}$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des bords étant exclus de l'ensemble.

Les dérivées partielles sont

$$(D_xG)(x,y) = (D_ug)(\exp(x), \ln(\arccos(y))).\exp(x)$$

$$(D_yG)(x,y) = (D_vg)(\exp(x), \ln(\arccos(y))).\left(\frac{-1}{\arccos(y)\sqrt{1-y^2}}\right)$$

où u et v sont respectivement les première et deuxième variables de g.

2. **On donne la fonction g continûment dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}[\times]0,+\infty[\times]0,\frac{10}{9}[$.**
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f : t \mapsto f(t) = g(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1)$.
   b) Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.

c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en 0 ? en $1/3$?
d) Mêmes questions si g est continûment dérivable sur $]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}[\times]\sqrt{2},+\infty[\times]0,3[$.
a) Le domaine de dérivabilité de f est $A =]-\frac{1}{3},\frac{1}{4}[$.
b) La dérivée de f est donnée par

$$Df(t) = (D_u g)\left(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right).\frac{2}{\sqrt{1-4t^2}} + (D_v g)\left(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right).\frac{-1}{2\sqrt{(t+1)^3}}$$

$$+(D_w g)\left(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right).2t$$

où u, v et w sont respectivement les première, deuxième et troisième variables de g.
c) La dérivée de f en 0 est donnée par $(Df)(0) = (D_u g)(0,1,1).2 + (D_v g)(0,1,1).(\frac{-1}{2})$; elle n'est pas dérivable en $1/3$.
d) Le domaine de dérivabilité de f est vide : f n'est jamais dérivable.

3. **Soit $F(t) = f(x(t), y(t))$ avec $x(3) = 2,\ y(3) = 7,\ (Dx)(3) = 5,\ (Dy)(3) = -4,\ (D_x f)(2,7) = 6$ et $(D_y f)(2,7) = -8$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en 3, que vaut (DF)(3) ?**

   On a $(DF)(3) = (D_x f)(2,7).(D_t x)(3) + (D_y f)(2,7).(D_t y)(3) = 62$.

4. **Soit $F(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en $(1,0)$ si**

$$u(1,0) = 2 \quad (D_s u)(1,0) = -2 \quad (D_t u)(1,0) = 6$$

$$v(1,0) = 3 \quad (D_s v)(1,0) = 5 \quad (D_t v)(1,0) = 4$$

   et $(D_u f)(2,3) = -1$ et $(D_v f)(2,3) = 10$, calculer $(D_s F)(1,0)$ et $(D_t F)(1,0)$.

   On a $(D_s F)(1,0) = (D_u f)(2,3).(D_s u)(1,0) + (D_v f)(2,3).(D_s v)(1,0) = 52$ et $(D_t F)(1,0) = (D_u f)(2,3).(D_t u)(1,0) + (D_v f)(2,3).(D_t v)(1,0) = 34$

II. Permutation de l'ordre d'intégration

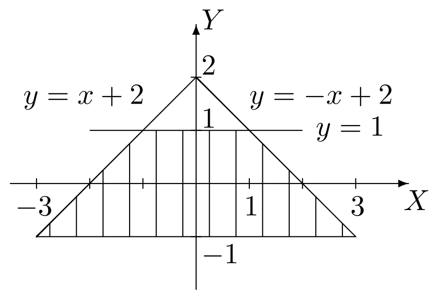
1. **Supposons que la fonction f est intégrable sur l'ensemble considéré. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants**

$$a) \int_{-1}^{1}\left(\int_{y-2}^{2-y} f(x,y)\ dx\right)\ dy \qquad\qquad b) \int_{0}^{3}\left(\int_{y}^{\sqrt{18-y^2}} f(x,y)\ dx\right)\ dy.$$

   a) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

$$\int_{-3}^{-1}\left(\int_{-1}^{x+2} f(x,y)\ dy\right) dx + \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\ dy\right) dx + \int_{1}^{3}\left(\int_{-1}^{-x+2} f(x,y)\ dy\right) dx$$

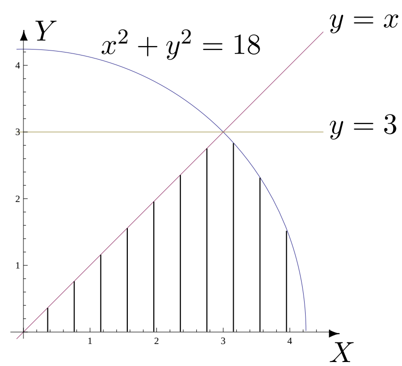
   et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



b) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

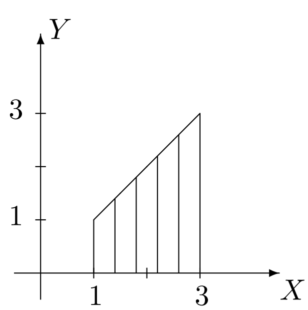
$$\int_0^3 \left(\int_0^x f(x,y)\ dy \right) dx + \int_3^{3\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{18-x^2}} f(x,y)\ dy \right) dx$$

et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



2. **On considère une fonction f intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné A ci-dessous. Ecrire, dans un ordre et dans l'autre, l'intégrale**

$$\int\int_A f(x,y) dx\, dy.$$



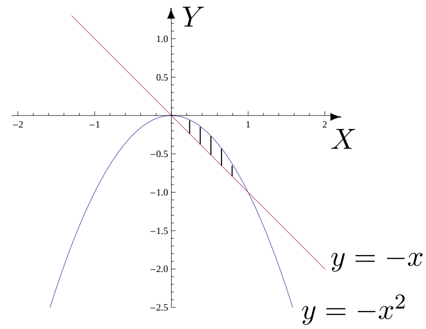
L'intégrale sur cet ensemble s'écrit

$$\int_1^3 \left(\int_0^x f(x,y)\ dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_1^3 f(x,y)\ dx \right) dy + \int_1^3 \left(\int_y^3 f(x,y)\ dx \right) dy.$$

III. Intégration sur des ensembles fermés bornés

1. **Dans le plan, on considère l'ensemble borné fermé A délimité par le graphique de la droite d'équation cartésienne $x+y=0$ et celui de la fonction $x \mapsto -x^2$.**
a) Représenter A dans un repère orthonormé et en donner une expression analytique.

b) Calculer, si elle existe, l'intégrale de f sur A si $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x\cos(y)$.



L'expression analytique de A est $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1],\ y \in [-x, -x^2]\}$ ou encore
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 0],\ x \in [-y, \sqrt{-y}]\}$.
La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\sin 1 - \frac{1}{2}(\cos 1 + 1)$.

2. **Si elle existe, calculer l'intégrale de**
   a) $f(x, y) = 4 + x^2$ sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 2],\ y \in [1 + x^2, 9 - x^2]\}$
   b) $f(x, y) = \cos(y^2)$ sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0],\ y \in [-x, 1]\}$
   c) $f(x, y) = y^2\cos(xy)$ sur $A = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \times [-1, 1]\}$

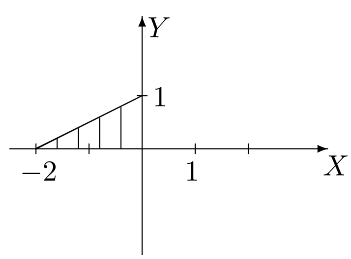
   a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{512}{5}$.

   b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}\sin 1$.

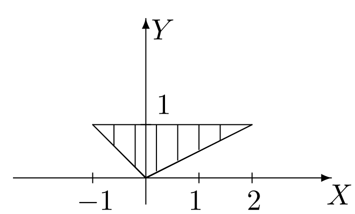
   c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{2\pi - 8}{\pi^2}$.

3. **Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble A borné fermé hachuré ci-dessous dans les cas suivants**

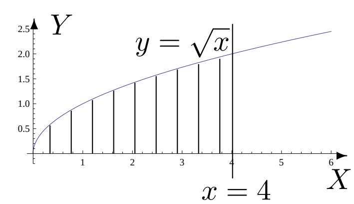
   a) $\int\int_A e^{x-y}\ dx\, dy$



   b) $\int\int_A xy\ dx\, dy$



   c) $\displaystyle\int\int_A \frac{y}{\sqrt{1 + x^2}}\ dx\, dy$



   a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\left(\dfrac{1}{e} - 1\right)^2$.

   b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{3}{8}$.

   c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}(\sqrt{17} - 1)$.

Liste 5 : fonctions de plusieurs variables (3)

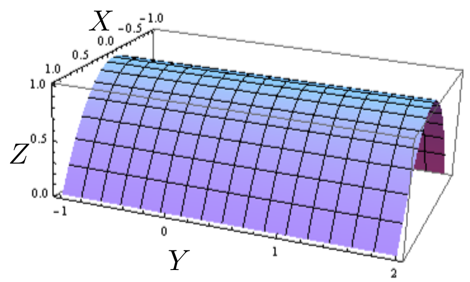
I. Volume d'un corps

Calculer le volume des corps de l'espace décrits ci-dessous. Donner aussi une représentation graphique de ces corps.

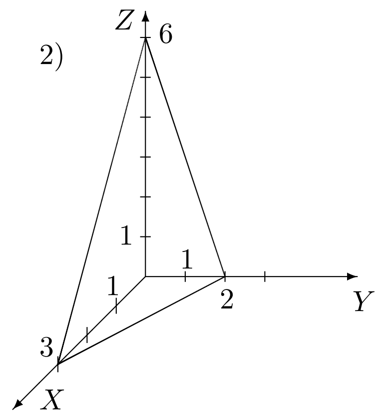
1. **Corps borné par la surface d'équation cartésienne** $z = 1 - x^2$ **et les plans d'équation** $z = 0,\ y = -1$ **et** $y = 2$.
2. **Corps borné par les plans de coordonnées et la surface d'équation** $2x+3y+z = 6$

   Le volume du premier corps vaut 4 (unités de volume) et celui du deuxième vaut 6.
   Les représentations graphiques sont les suivantes :

1)



2)

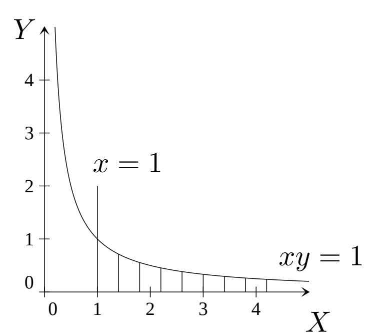


II. Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. **Si elles ont un sens, calculer les intégrales suivantes et représenter l'ensemble d'intégration.**

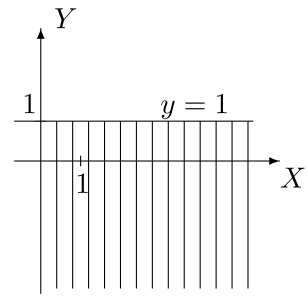
   a) $\displaystyle\int\int_A \frac{1}{x}\, dx\, dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$

   La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



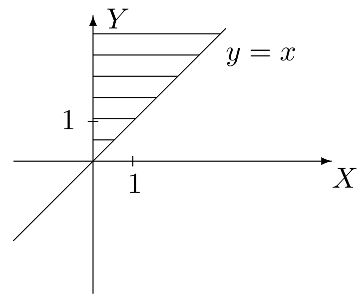
   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \left(\int_0^{+\infty} e^{y-3x}\, dx \right) dy$

La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[,\ y \in]-\infty,1]\}$ et son intégrale vaut $\frac{e}{3}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



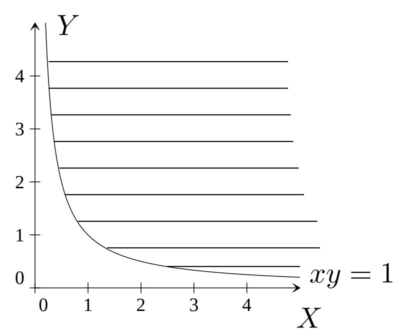
c) $\displaystyle\int\int_A e^{-y^2}\,dx\,dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y\}$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut $\frac{1}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



d) $\displaystyle\int\int_A x^3\,e^{-x^2 y}\,dx\,dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 1 \le xy\}$

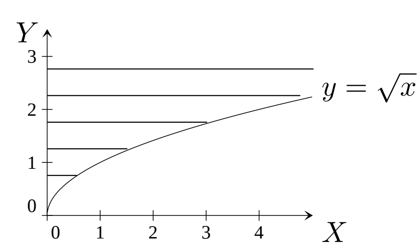
La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



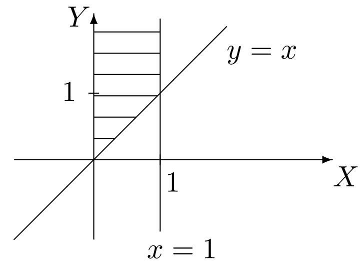
2. **Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.**

$$a)\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{y^2}\frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\,dx\right)dy,\quad b)\int_0^1\left(\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}\,dy\right)dx,\quad c)\int_0^1\left(\int_0^{x^2}\frac{1}{x+y}\,dy\right)dx$$

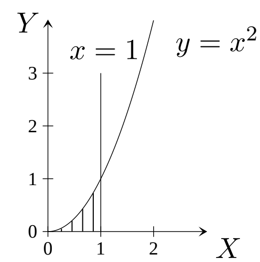
a) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]0,+\infty[,\ x \in [0,y^2]\}$ et son intégrale vaut $\frac{1}{2}\ln 2$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



b) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,1],\ y \in [x,+\infty[\}$ et son intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



c) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,1],\ y \in [0,x^2]\}$ et son intégrale vaut $2\ln 2 - 1$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



3. **On considère l'intégrale double suivante**

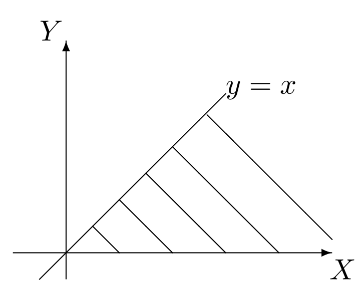
$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x \cos(y-x) e^{-x}\ dy \right) dx$$

a) Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
b) Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales dans un ordre et dans l'autre.
c) Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Pouvait-on le prévoir sans calculer les 2 intégrales ?

a) L'ensemble d'intégration A est donné par

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[,\ y \in [0,x]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in [y,+\infty[\}$$

et est représenté par l'ensemble hachuré ci -contre.
En permutant l'ordre d'intégration, on a
$I' = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_y^{+\infty} \cos(y-x) e^{-x}\ dx \right) dy.$
b) La fonction est intégrable sur A et, dans un ordre ou dans l'autre, son intégrale vaut $1/2$.
c) On trouve la même valeur car la fonction est intégrable sur A.



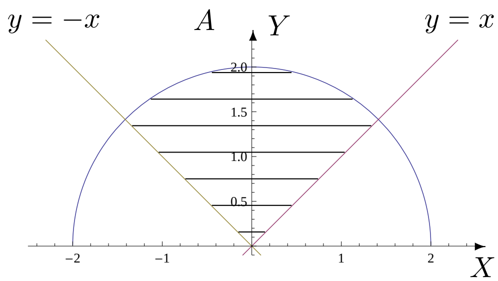
III. Intégration par changement de variables polaires

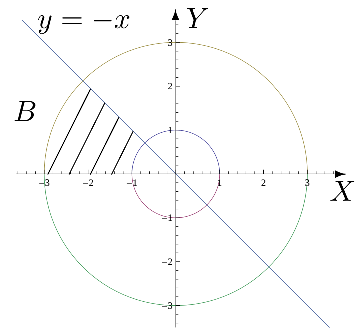
1. **Si elle existe, calculer**

a) $\displaystyle\int\int_A \sqrt{x^2+y^2}\ dx\, dy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.

b) $\displaystyle\int\int_B xy\ dx\, dy$ où B est l'ensemble hachuré ci-dessous.

c) $\displaystyle\int\int_C (2x+y)\ dx\,dy$ où $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{-x, \sqrt{1-x^2}\}\}$.





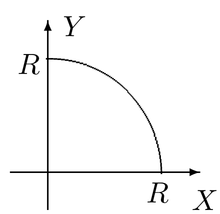
Les 3 fonctions sont intégrables et les intégrales valent respectivement $\dfrac{4\pi}{3}$, -5 et $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

2. **Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où**

$$x_A = s^{-1} \int\int_A x\ dx\ dy, \quad y_A = s^{-1} \int\int_A y\ dx\ dy$$

et où s est l'aire de la surface A.
Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un tiers de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

La position du centre de masse est donnée par le point de coordonnées $\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2\pi}, \dfrac{3R}{2\pi}\right)$ dans un repère orthonormé correspondant au graphique ci-dessous.



3. **Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 9 - x^2 - y^2$ et par le plan d'équation $z = 0$.**

Le volume du corps est $\dfrac{81\pi}{2}$ (unités de volume).

Liste 6 : approximations polynomiales

Approximations polynomiales

1. **Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations.**

$f_1(x) = \cos(x)\ e^{3x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3$ $\qquad$ $f_2(x) = \sqrt{1+9x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2$

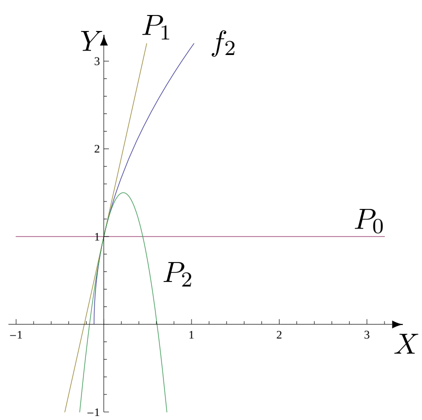
$f_3(x) = \dfrac{1}{1-2x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2$ $\qquad$ $f_4(x) = \mathrm{arctg}(x),\ x_0 = 0$ (resp. $x_0 = 1$), $n = 0, 1, 2$

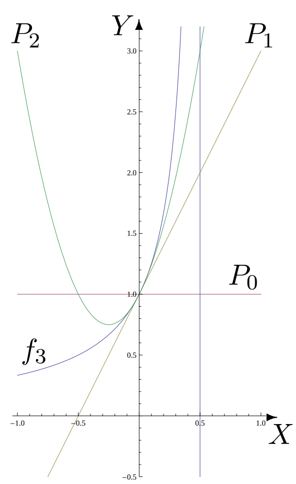
$f_5(x) = \cos^2(x),\ x_0 = 0,\ n = 0, 1, 2$ $\qquad$ $f_6(x) = \sin(x),\ x_0 = 1, n = 0, 1, 2$

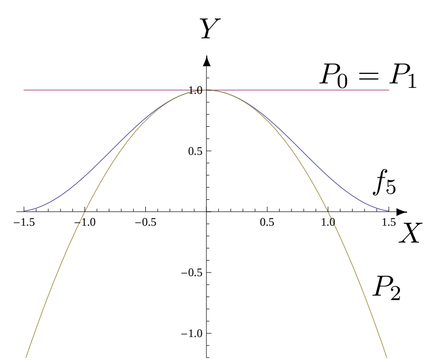
Fonction	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2
f_1	1	$1+3x$	$1+3x+4x^2,\ x \in \mathbb{R}$
f_2	1	$1+\dfrac{9x}{2}$	$1+\dfrac{9x}{2}-\dfrac{81x^2}{8},\ x \in \mathbb{R}$
f_3	1	$1+2x$	$1+2x+4x^2,\ x \in \mathbb{R}$
$f_4(x_0=0)$	0	x	$x,\ x \in \mathbb{R}$
$f_4(x_0=1)$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-1}{2}$	$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{(x-1)^2}{4},\ x \in \mathbb{R}$
f_5	1	1	$1-x^2,\ x \in \mathbb{R}$
f_6	$\sin(1)$	$\sin(1)+\cos(1)(x-1)$	$\sin(1)+\cos(1)(x-1)-\sin(1)\dfrac{(x-1)^2}{2},\ x \in \mathbb{R}$

L'approximation à l'ordre 3 en 0 de f_1 est donnée par $P(x) = 1+3x+4x^2+3x^3,\ x \in \mathbb{R}$.

Dans les graphiques suivants, notons P_i l'approximation polynomiale à l'ordre i.

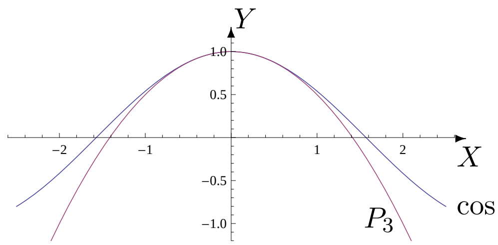






2. **Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction** $\cos$ **et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.**

   L'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 est donnée par $P(x) = 1 - \frac{x^2}{2},\ x \in \mathbb{R}$ et le reste vaut $R_3(x) = \dfrac{\cos(u)}{4!}x^4,\ x \in \mathbb{R}$ avec u strictement compris entre 0 et x. Dès lors, on a $\quad |R_3(x)| \leq \dfrac{x^4}{24}$.

3. **Un professeur de mathématique lance un défi à ses élèves. Le premier qui donnera une approximation du nombre** e **avec les 3 premières décimales exactes et pourra expliquer sa méthode aux autres sera dispensé de la prochaine interrogation. Pour relever le défi, les élèves, restés en classe, n'ont droit qu'à une feuille et un crayon. Ils sont sans accès à internet et ne peuvent utiliser ni gsm, ni calculatrice ...**

   Comment peuvent-ils procéder ?

   L'approximation polynomiale en 0 à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) de l'exponentielle est donnée par

   $$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}$$

   et le reste associé vaut $R_n(x) = \dfrac{e^u}{(n+1)!}\,x^{n+1},\ x \in \mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x. Dès lors, si $x \in [0,1]$, $e^u \in [1,e] \subset [1,3]$ et on a $\quad R_n(x) \leq \dfrac{3\,x^{n+1}}{(n+1)!}$.

   Si $x = 1$, l'inégalité

   $$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{10^3} \quad \text{est vérifiée si} \quad n \geq 6\ (7! = 5040).$$

   Dès lors, en prenant $n = 6$ et $x = 1$, une valeur approchée de e est donnée par

   $$P(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2 + \frac{517}{720} = 2,718\ldots$$

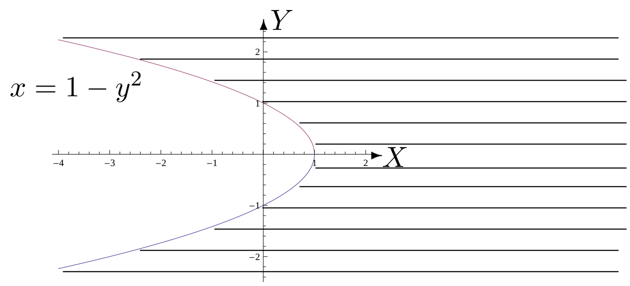
Liste 8 : révisions

1. **On donne la fonction f par**

$$f(x,y) = \sqrt{x+y^2-1}$$

   (a) **Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.**

   La fonction f est infiniment dérivable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y^2-1 > 0\}$. Les points de l'ensemble sont représentés par la partie hachurée du plan, les points de la parabole étant exclus.



   (b) **Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(3t^2, 2t+1)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.**

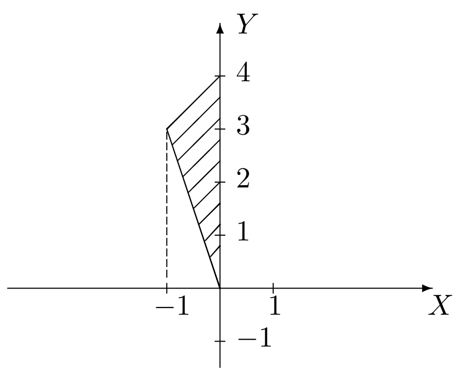
   La fonction F est la fonction $t \mapsto F(t) = \sqrt{7t^2+4t}$; son domaine de dérivabilité est l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} : 7t^2+4t > 0\} = \left]-\infty, -\frac{4}{7}\right[\cup \left]0,+\infty\right[$ et sa dérivée est donnée par $DF(t) = \dfrac{7t+2}{\sqrt{7t^2+4t}}$.

   (c) **Que vaut la dérivée de F en 1 ? Simplifier votre réponse au maximum.**

   La dérivée de F en 1 vaut $\dfrac{9\sqrt{11}}{11}$.

2. **On donne l'ensemble fermé hachuré A suivant. Déterminer**

$$\iint_A xe^{x-y}\,dxdy.$$



La fonction $f:(x,y)\mapsto xe^{x-y}$ est continue sur le fermé borné A ; elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\iint_A xe^{x-y}dxdy = \frac{13}{16e^4}-\frac{1}{16}.$$

3. **On donne la matrice**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) **Déterminer les valeurs propres de A.**

Les valeurs propres de A sont $2-i$ et $2+i$.

(b) **Cette matrice est-elle diagonalisable ? Si oui, en donner une forme diagonale ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit puis vérifier que ces matrices sont correctes.**

Les valeurs propres étant simples, la matrice est diagonalisable et on a, par exemple,

$$S^{-1}AS=\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad S=\begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) **Montrer que la matrice A vérifie $A^2-4A+5I=0$ où I est la matrice identité.**

4. **Soient les matrices**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C=\begin{pmatrix} 4 \\ i \end{pmatrix}$$

Si c'est possible, calculer

(a) **1)** AB **2)** BA **3)** BC **4)** CB **5)** AC **6)** CA

(b) **le déterminant des matrices obtenues ci-dessus**

(c) **la matrice inverse de A et des matrices obtenues ci-dessus**

(a) 1) et 6) Le produit AB est impossible à calculer car le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B ; pour une raison analogue, le produit CA ne peut être calculé.
Dans les autres cas, on a

2) $BA=(-2 \quad -7)$ 3) $BC=-8+3i$ 4) $CB=\begin{pmatrix} -8 & 12 \\ -2i & 3i \end{pmatrix}$ 5) $AC=\begin{pmatrix} 4+2i \\ -i \end{pmatrix}$

(b) Le produit BA est une matrice de format 1×2 et AC est une matrice de format 2×1 ; comme ces matrices ne sont pas carrées, on ne peut calculer leur déterminant.
Le déterminant de BC vaut $-8+3i$.
Le déterminant de CB est nul car les colonnes de CB sont multiples l'une de l'autre ($C_2=-\frac{3}{2}C_1$).

(c) La matrice inverse de A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Une matrice carrée admet un inverse si et seulement si son déterminant est non nul. Dès lors, seul BC admet un inverse égal à $\frac{-8-3i}{73}$.

5. **On donne la fonction f par**

$$f(x) = \mathrm{tg}(2x).$$

(a) **Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre 1, 2 et 3 en 0.**

Si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale à l'ordre n en 0, on a

$$P_1(x) = 2x = P_2(x), \quad P_3(x) = 2x + \frac{8}{3}x^3, \; x \in \mathbb{R};$$

(b) **Dans un même repère orthonormé, représenter le graphique de f et les approximations demandées au voisinage de 0 en utilisant différentes couleurs.**