1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématiques générales : partim B

Répétition 1* : Physique

Correction

Version 22 avril 2016

Répétition 1* : compléments d'algèbre linéaire et compléments sur les équations différentielles (1)

I. Représentation d'un opérateur linéaire dans une base, changement de base

1. **Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la projection orthogonale sur la première bissectrice.**
   (a) Cette opération est-elle linéaire ?

   Cette opération est bien linéaire vu la linéarité du produit matriciel : en effet, si on exprime dans une base cartésienne du plan les composantes de la projection d'un vecteur $\vec{v}$ en fonction des composantes de celui-ci, on obtient le produit d'une matrice par un vecteur et cette opération est linéaire (cf. propriété du produit matriciel).

   (b) Si oui, en déterminer la représentation matricielle dans la base constituée des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ de composantes respectives $(1,0)$, $(0,1)$ (appelée *base canonique* du plan).

   Dans la base canonique du plan, cette opération est représentée par la matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) Cette représentation matricielle est-elle diagonalisable ? Le cas échéant, expliquer à quoi correspond toute forme diagonale de cette représentation matricielle.

   Les valeurs propres de la matrice A sont 0 et 1, toutes deux simples, et donc A est diagonalisable. Les vecteurs propres associés à 0 et 1 sont respectivement de la forme

   $$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{C}_0 \qquad \text{et} \qquad \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \beta \in \mathbb{C}_0,$$

   de sorte que, en posant $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   De manière générale, toute matrice S ainsi construite (sur base de vecteurs propres de A) est une matrice de changement de base permettant de passer de la base canonique de départ, dans laquelle l'opération est représentée par A, à une nouvelle base dans laquelle l'opération est représentée par une matrice diagonale.

2. **On considère le plan muni du repère orthonormé $(O;(\vec{e}_1,\vec{e}_2))$ où $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est la base canonique du plan ; on note cet espace vectoriel E. Soit le vecteur**

   $$\vec{b} = \frac{\vec{e}_1+\vec{e}_2}{\|\vec{e}_1+\vec{e}_2\|}$$

   et l'opérateur

   $$\mathcal{P} : E \to E,\ \vec{x} \mapsto (\vec{x}\cdot\vec{b})\vec{b}.$$

   (a) Cet opérateur est-il linéaire ?

   Oui : puisque le produit scalaire est linéaire, il vient que

   $$\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{x},\vec{y} \in E\ :\ \mathcal{P}(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) = \lambda\mathcal{P}(\vec{x})+\mu\mathcal{P}(\vec{y}).$$

   (b) Si oui, en déterminer la représentation matricielle P dans la base canonique $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. Cette matrice P est-elle diagonalisable ? Le cas échéant, en déterminer une forme diagonale P' ainsi qu'une matrice S y conduisant.
   Interpréter le passage de P à P' et caractériser la base dans laquelle $\mathcal{P}$ est représenté par P'.

   Voir les points (b) et (c) de l'exercice précédent.

3. **Soit l'opérateur**

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x - 2y \\ -5x + y \end{pmatrix}.$$

(a) Vérifier que cet opérateur est linéaire.
Il l'est vu la linéarité des opérations matricielles :
$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \\ T\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \lambda T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

(b) Déterminer la représentation matricielle de T dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

L'opérateur T est représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Vérifier que les vecteurs

$$\vec{e'}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \qquad \vec{e'}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$

constituent une autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est de dimension deux et ces vecteurs sont linéairement indépendants puisque

$$\det(\vec{e'}_1\ \vec{e'}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Donc, les vecteurs $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ constituent bien une autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$.

(d) Déterminer la matrice de changement de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

La matrice de changement de base est donnée par $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(e) Déterminer la représentation matricielle de T dans la base $\mathcal{B}'$.

Dans la base $\mathcal{B}'$, l'opérateur T est représenté par la matrice $A' = S^{-1}AS$. Comme $S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
T est donc représenté par la matrice $A' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

(f) Déterminer, en fonction des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$, des vecteurs $\vec{e''}_1, \vec{e''}_2$ formant une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle T est représenté par une matrice diagonale.

Pour ce faire, il faut diagonaliser la matrice A. Les valeurs propres de A étant -4 et 3, toutes deux simples, A est diagonalisable : cette matrice admet les vecteurs propres linéairement indépendants $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, de sorte que, pour $S' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S'^{-1}AS' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.
Dès lors, S' est la matrice de changement de base entre $\mathcal{B}$ et la base $\mathcal{B}''$ formée des vecteurs $\vec{e''}_1, \vec{e''}_2$ de composantes respectives (dans $\mathcal{B}$) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire des vecteurs

$$\vec{e''}_1 = 2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 \qquad , \qquad \vec{e''}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2,$$

dans laquelle l'opérateur T est représenté par la matrice diagonale $S'^{-1}AS' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

4. **Soit l'opérateur**

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+y+z \\ -6x+4y+2z \\ 3x-y+z \end{pmatrix}.$$

(a) Vérifier que cet opérateur est linéaire.

Il l'est vu la linéarité des opérations matricielles :
$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \\ T\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) = \lambda T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) \end{array} \right.$$

(b) Déterminer la représentation matricielle de T dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

L'opérateur T est représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Vérifier que les vecteurs

$$\vec{e'}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \qquad \vec{e'}_2 = 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \qquad \vec{e'}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$$

constituent une autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est de dimension trois et ces vecteurs sont linéairement indépendants puisque

$$\det(\vec{e'}_1\ \vec{e'}_2\ \vec{e'}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Donc, les vecteurs $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3$ constituent bien une autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

(d) Déterminer la matrice de changement de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

La matrice de changement de base est donnée par $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(e) Déterminer la représentation matricielle de T dans la base $\mathcal{B}'$.

Dans la base $\mathcal{B}'$, l'opérateur T est représenté par la matrice $A' = S^{-1}AS$. Comme $S^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,
T est donc représenté par la matrice $A' = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -8 & 40 & -10 \\ -2 & 16 & -1 \\ 8 & -16 & 16 \end{pmatrix}$.

(f) Déterminer, en fonction des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$, des vecteurs $\vec{e''}_1, \vec{e''}_2, \vec{e''}_3$ formant une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle T est représenté par une matrice diagonale.

Pour ce faire, il faut diagonaliser la matrice A. Les valeurs propres de A sont 0 (simple) et 2 (double). La valeur propre 2 admet des vecteurs propres de la forme

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ne sont pas simultanément nuls, ce qui implique que A est diagonalisable. Cette matrice admet les vecteurs propres linéairement indépendants $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, de sorte que, pour $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $S'^{-1}AS' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Dès lors, S' est la matrice de changement de base entre $\mathcal{B}$ et la base $\mathcal{B}''$ formée des vecteurs $\vec{e''}_1, \vec{e''}_2, \vec{e''}_3$ de composantes respectives (dans $\mathcal{B}$) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire des vecteurs

$$\vec{e''}_1 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 \qquad , \qquad \vec{e''}_2 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \qquad \vec{e''}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

dans laquelle l'opérateur T est représenté par la matrice diagonale $S'^{-1}AS' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II. Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant l'intervalle sur lequel on travaille (f est une fonction de la variable réelle x).

(a) $D^3f(x) + 2D^2f(x) - Df(x) - 2f(x) = e^x + x^2$

(b) $D^2f(x) - 2Df(x) + 3f(x) = \sin(x)$

(c) $D^3f(x) - 4Df(x) = xe^{2x} + x^2$

(d) $D^3f(x) - 12Df(x) + 16f(x) = 32x - 8$

(e) $D^3f(x) + Df(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$

(f) $\sin(x)D^2f(x) + \sin(x)f(x) = 1$

Les solutions générales des EDLCC sont données par

(a) $f(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{4} + \dfrac{x}{6}e^x,\ x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = e^x\left(C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x)\right) + \dfrac{1}{4}\left(\sin(x) + \cos(x)\right),\ x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x} + \dfrac{e^{2x}}{32}\left(2x^2 - 3x\right) - \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{x}{8},\ x \in \mathbb{R}$

(d) $f(x) = (C_1 + C_2x)\,e^{2x} + C_3e^{-4x} + 2x + 1,\ \ x \in \mathbb{R}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} + C_1 + (C_2 + \ln|\cos(x)|)\cos(x) + (C_3 + x - \mathrm{tg}(x))\sin(x),\ x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

(f) $f(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) - \cos(x)\ln\left(\mathrm{tg}(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2})\right),\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\dfrac{\pi}{2}\ :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes complexes arbitraires.

III. Equations d'Euler

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $]0,+\infty[$ (f et y sont des fonctions de la variable réelle $x>0$).

(a) $x^2D^2f(x) - xDf(x) + f(x) = x$

(c) $x^3D^2y - x^2Dy - 3xy + 16\ln(x) = 0$

(d) $(x+1)^2D^2f(x) + (x+1)Df(x) + f(x) = x^2 + 2\sin\ln(1+x)$
(Sugg. : poser $x+1=e^t$)

Les solutions générales sont données par

(a) $f(x) = x\left(C_1 + C_2\ln(x) + \dfrac{\ln^2(x)}{2}\right)$

(c) $y(x) = C_1x^3 + \dfrac{C_2}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x} + 2\dfrac{\ln^2(x)}{x}$

(d) $f(x) = C_1\cos(\ln(x+1)) + C_2\sin(\ln(x+1)) + \dfrac{(x+1)^2}{5} - x - \ln(x+1)\cos(\ln(x+1))$

où C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 sont des constantes complexes arbitraires.

IV. Equations exactes

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant, si possible, l'intervalle sur lequel on travaille (f et u sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $xDf(x) + f(x) + x^3 = 0$

(b) $\ln(x)Du + \dfrac{u}{x} = \dfrac{3}{x}\ln^2(x)$

(c) $Du = -\dfrac{3x^2u - u^3}{x^3 - 3xu^2}$

(d) $Df(x) = -\dfrac{f(x)\cos(xf(x)) + 2x}{x\cos(xf(x))}$

(e) $x^2D^2u - xDu = 2x^4e^{-x^2}$ **(Sugg. : diviser les deux membres par x^3)**

(f) $x^2Df(x) + 4f(x)Df(x) + 2xf(x) - 1 = 0$

(g) $xuDu + u^2 + x^2 = 0$

(h) $xDu + u = u^3$ **(Sugg. : diviser les deux membres par u^3)**

Les solutions générales sont données par

(a) $f(x) = \dfrac{C}{x} - \dfrac{x^3}{4},\ x \in \mathbb{R}_0$

(b) $u(x) = \dfrac{C}{\ln(x)} + \ln^2(x),\ x \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$

(c) $x^3u(x) - xu^3(x) = C$

(d) $\sin(xf(x)) + x^2 = C$

(e) $u(x) = \dfrac{1}{2}e^{-x^2} + C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2,\ x \in \mathbb{R}$

(f) $2f^2(x) + x^2f(x) + x = C$

(g) $x^2u^2(x) + \dfrac{x^4}{2} = C$

(h) $u^2(x)(Cx^2+1) = 1$

où C, C_1, C_2 sont des constantes complexes.
Notons de plus que
- l'équation (a) admet la solution singulière $y=0$;
- l'équation (h) admet la solution singulière $y=0$.

V. Equations à second membre séparé

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant, si possible, l'intervalle sur lequel on travaille (f, y et u sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $2\sqrt{f(x)} = Df(x)$

(b) $xf(x)Df(x) + f^2(x) + 1 = 0$

(c) $(1+e^x)f(x)Df(x) = e^x$

(d) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}Dy = 0$

(e) $Du - 2xu = x$

(f) $Dy = \sin(x+y)$ **(Sugg. : poser $u = x + y$)**

(g) $(2x+2y+1)Dy + (x+y+1) = 0$ **(Sugg. : poser $u = x + y + 1$)**

Les solutions générales sont données par

(a) $f(x) = (x+C)^2,\ x \geq -C$

(b) $x^2(1+f^2(x)) = C$

(c) $f^2(x) = 2\ln(1+e^x) + C,\ x \in \mathbb{R}$

(d) $\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2} = C$

(e) $u(x) = Ce^{x^2} - \dfrac{1}{2},\ x \in \mathbb{R}$

(f) $\sin(x+y) - 1 = (x+C)\cos(x+y)$

(g) $x + 2y + \ln|x+y| = C$

où C est une constante complexe.
Notons de plus que
- l'équation (a) admet la solution singulière $y = 0$;
- l'équation (d) admet les solutions singulières $y = -1$ et $y = 1$;
- l'équation (f) admet les solutions singulières $y_k : x \mapsto -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

VI. Divers

1. **Un flotteur plongé dans l'eau subit son propre poids et la poussée d'Archimède (égale au poids de liquide déplacé). Si la section A du flotteur est constante, la hauteur immergée $z(t)$ du flotteur varie selon**

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - \rho Agz$$

où m est la masse du flotteur, g l'accélération de pesanteur et ρ la masse volumique de l'eau.
Déterminer le comportement du flotteur lorsqu'on le dépose sans vitesse juste à la surface du liquide.

La hauteur immergée du flotteur est donnée par $z(t) = \dfrac{m}{\rho A}\left(1 - \cos\left(\sqrt{\dfrac{\rho Ag}{m}}\, t\right)\right),\ t \geq 0.$

2. **On considère un circuit électrique composé d'une force électromotrice V constante, d'une résistance R et d'une self inductance L placées en série. A l'instant initial, le circuit n'est parcouru par aucun courant. on a**

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V.$$

(a) Déterminer l'intensité $i(t)$ du courant à tout instant t.
(b) Déterminer son comportement à long terme (c'est-à-dire pour t tendant vers l'infini).

(a) l'intensité du courant à tout instant t est donnée par

$$i(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \quad t \geq 0.$$

(b) A long terme, l'intensité du courant tend vers $\frac{V}{R}$.

3. **Un médecin arrivant sur le lieu d'un crime constate que la température du mort est de $32°$ et que la température de l'air ambiant est de $18°$C. Deux heures plus tard, la température du mort est descendue à $26°$. En supposant que le taux de refroidissement du corps est proportionnel à la différence de température entre l'air et le corps de la victime (loi de Newton) et que la température du corps au moment du décès était de $36°$C, déterminer le temps écoulé depuis la mort de la victime jusqu'à l'arrivée du médecin.**

   Le temps écoulé depuis la mort de la victime jusqu'à l'arrivée du médecin est 54 minutes.

4. **Si on tient compte des pertes de mémoire, le taux de mémorisation d'un cours est donné par**

$$\frac{dA}{dt}(t) = \alpha\,(M - A(t)) - \beta A(t)$$

   où α et β sont des constantes positives, où $A(t)$ désigne la quantité de matière mémorisée et où M désigne la quantité de matière totale à mémoriser.
   (a) Déterminer la quantité de matière mémorisée à tout instant t.
   (b) Déterminer la quantité de matière mémorisée à long terme.
   (c) Déterminer la quantité de matière mémorisée à tout instant t si, initialement, rien n'a été mémorisé.

   (a) La quantité de matière mémorisée à tout instant t est donnée par

$$A(t) = \frac{\alpha M}{\alpha + \beta} + Ce^{-(\alpha+\beta)t}, \quad t \geq 0$$

   où C est une constante complexe arbitraire.
   (b) A long terme, la quantité de matière mémorisée tend vers $\frac{\alpha M}{\alpha+\beta}$.
   (c) Dans ce cas, la quantité de matière mémorisée est donnée par $A(t) = \frac{\alpha M}{\alpha+\beta}\left(1 - e^{-(\alpha+\beta)t}\right)$.

5. **L'équation de la déformation d'une poutre élastique supportant une charge uniformément répartie sur toute sa longueur l est donnée par**

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_0 \qquad , \qquad 0 \leq x \leq l$$

   où EI représente la rigidité flexionnelle de la poutre et où w_0 représente la charge par unité de longueur.
   Déterminer la déformation d'une poutre encastrée à ses deux extrémités, c'est-à-dire telle que

$$y(0) = y(l) = 0 \qquad , \qquad Dy(0) = Dy(l) = 0.$$

   La déformation de la poutre est donnée par $y(x) = \dfrac{w_0}{24EI}\,x^2(x-l)^2$.

6. **La forme prise par une corde à sauter mise en rotation par deux enfants placés aux deux extrémités de la corde et synchronisant leurs mouvements est donnée par**

$$\frac{d}{dx}\left[T(x)\frac{dy}{dx}\right] + \rho\omega^2 y(x) = 0 \quad , \quad y(0) = y(l) = 0$$

   où ρ désigne la masse par unité de longueur et $T(x)$ la tension dans la corde.
   Déterminer les vitesses ω critiques et les formes $y(x)$ associées pour lesquelles la rotation de la corde est possible
   (a) si la tension T dans la corde est supposée constante ;
   (b) si la tension dans la corde est donnée par $T(x) = (x+1)^2$.

(Sugg. : il faut trouver les formes y non identiquement nulles [1])

(a) La rotation de la corde est permise pour les vitesses critiques

$$\omega_k = \frac{k\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

qui correspondent aux déformations [2]

$$y_k(x) = C\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

(b) La rotation de la corde est permise pour les vitesses critiques

$$\omega_k = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\sqrt{1 + \frac{4k^2\pi^2}{\ln^2(1+l)}} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

qui correspondent aux déformations

$$y_k(x) = \frac{C}{\sqrt{1+x}}\sin\left(\frac{k\pi\ln(1+x)}{\ln(1+l)}\right) \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

7. **Soit la réaction chimique $A + B \to C$.**
A l'instant initial $t = 0$ sont présentes a moles du corps A, b moles du corps B et aucune mole du corps C. En posant $x(t)$ le nombre de moles du corps C présentes à l'instant t, on suppose que la vitesse d'apparition de C suit la loi

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

où k est une constante positive.
Déterminer la concentration x de C à tout instant t, ainsi que la concentration de C à long terme, dans le cas où
(a) initialement, les corps A et B sont présents en même quantité ;
(b) initialement, le corps A est présent en plus grande quantité que le corps B.

(a) Dans le cas où $a = b$, la concentration de C à tout instant t est donnée par

$$x(t) = \frac{a^2kt}{1+akt}$$

de sorte qu'à long terme, la concentration de C tend vers $a = b$.

(b) Dans le cas où $a > b$, la concentration de C à tout instant t est donnée par

$$x(t) = \frac{ab\left(1 - e^{k(b-a)t}\right)}{a - be^{k(b-a)t}}$$

de sorte qu'à long terme, la concentration de C tend vers b.

1. Le cas particulier $y = 0$ correspond au cas où la corde est tendue horizontalement et ne tourne donc pas.
2. En pratique, c'est le premier mode ($k = 1$) qui apparait !