1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématiques générales : partim B

Répétition 2* : Physique

Correction

Version 22 avril 2016

Répétition 2* : compléments sur les équations différentielles (2) et intégrales paramétriques

I. Equations différentielles à second membre linéaire

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant le domaine sur lequel on travaille (f et y sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $(1+x^2)Dy(x) - 2xy(x) = (1+x^2)^2$

(b) $Df(x) + 2xf(x) = 2xe^{-x^2}$

(c) $xDy(x) + y(x) = -x^3$

(d) $x^3Df(x) + (2-3x^2)f(x) = x^3$

(e) $\dfrac{1}{y^2(x)}Dy(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{xy(x)}$

(f) $Df(x) = \operatorname{tg}(x)f(x) + \cos(x),\ f(0) = 1$

Les solutions générales de ces équations différentielles sont données par

(a) $y(x) = (C+x)(1+x^2),\ x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = (C+x^2)e^{-x^2},\ x \in \mathbb{R}$

(c) $y(x) = \dfrac{C}{x} - \dfrac{x^3}{4},\ x \in \mathbb{R}_0$

(d) $2f(x) = Cx^3e^{\frac{1}{x^2}} + x^3,\ x \in \mathbb{R}_0$

(e) $y(x) = \dfrac{1}{2x} + Cx,\ x \in \mathbb{R}_0$

(f) $f(x) = \dfrac{2x + \sin(2x) + 4}{4\cos(x)},\ x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

où C est une constante complexe arbitraire.

Remarque : La solution générale de (f) est valable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$, mais comme la condition initiale est donnée en $x = 0$, la solution du problème est valable uniquement sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ni 0$.

II. Equations différentielles à second membre homogène

Résoudre les équations différentielles suivantes (f et y sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $Df(x) = \dfrac{x}{f(x)} + \dfrac{f(x)}{x}$

(b) $y(x) + (2\sqrt{xy(x)} - x)Dy(x) = 0$

(c) $xDy(x) = y(x)\ln\left(\dfrac{y(x)}{x}\right)$

(d) $y^2(x) - 3x^2 + 2xy(x)Dy(x) = 0$

(e) $f^2(x) + x(x - f(x))Df(x) = 0$

(f) $Df(x) = \dfrac{f(x)}{x} + \dfrac{f^2(x)}{x^3}$

Les solutions générales de ces équations différentielles sont données par

(a) $f^2(x) = x^2(\ln(x^2) + C)$

(b) $\ln|y(x)| + \sqrt{\dfrac{x}{y(x)}} = C$

(c) $y(x) = xe^{Cx+1},\ x \in \mathbb{R}$

(d) $x(x^2 - y^2(x)) = C$

(e) $f(x) = x\ln(C_1|f(x)|)$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+Cx}$

où C est une constante complexe arbitraire et C_1 une constante réelle strictement positive.
Notons de plus que les équations (e) et (f) admettent la solution singulière $f = 0$.

III. Equations différentielles - Types

Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer SANS LA RESOUDRE le type d'équation dont il s'agit ainsi qu'une méthode pour la résoudre (f et y sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $Df(x) = \dfrac{x+2f(x)+5}{2x+4f(x)-3}$

(b) $Dy(x) = -\dfrac{2y(x)+1}{x}$

(c) $Df(x) = \dfrac{e^{2f(x)} - f(x)\cos(xf(x))}{x\cos(xf(x)) - 2xe^{2f(x)} - 2f(x)}$

(d) $(1-x^2)Dy(x) = y(x) - (x+1)^2(x-1)$

(e) $x^2D^2f(x) + xDf(x) + f(x) = \dfrac{1}{\cos(\ln(x))} + 2\sin(\ln(x))$

(f) $D^6f(x) - 2D^4f(x) - 4D^2f(x) + 8f(x) = e^{\sqrt{2}x} + \cos(x)$

(g) $(x^2 + 2xy(x) - y^2(x)) + (y^2(x) + 2xy(x) - x^2)Dy(x) = 0$

(h) $\sqrt{1-x^2}Df(x) - f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

Il s'agit

(a) d'une équation qui, en posant $u(x) = x + 2f(x)$, correspond à une équation à second membre séparé, à savoir

$$\frac{1}{2}(Du(x) - 1) = \frac{u(x)+5}{2u(x)-3} \ ;$$

(b) d'une équation à second membre linéaire ;

(c) d'une équation exacte qui équivaut à

$$D\left(\sin(xf(x)) - xe^{2f(x)} - f^2(x)\right) = 0 \ ;$$

(d) d'une équation à second membre linéaire ;

(e) d'une équation d'Euler qui se réécrit, en effectuant le changement de variable $x = e^t$ et en posant $F(t) = f(e^t)$,

$$D^2F(t) + F(t) = \frac{1}{\cos(t)} + 2\sin(t)$$

qui est une EDLCC d'ordre 2 non homogène. Celle-ci se résout en cherchant la solution générale F_h de l'équation homogène associée (via les zéros du polynôme carcatéristique) ainsi qu'une solution particulière F_p : cette dernière peut être obtenue en cherchant des solutions particulières F_{p_1} et F_{p_2} des équations

$$D^2F(t) + F(t) = \frac{1}{\cos(t)} \qquad \text{et} \qquad D^2F(t) + F(t) = 2\sin(t)$$

respectivement. Une solution F_{p_1} de la première équation peut être déterminée par la méthode de variation des constantes. Sachant que la seconde est à coefficients réels et que $\sin(t) = \mathcal{I}\mathrm{m}(e^{it})$, une solution F_{p_2} peut en être déterminée en prenant la partie imaginaire d'une solution particulière de l'équation

$$D^2F(t) + F(t) = 2e^{it},$$

qui peut, quant à elle, être déterminée par la méthode des exponentielles polynômes (Notons que i est un zéro de multiplicité 1 du polynôme carcatéristique).
Ainsi, la solution générale de l'EDLCC ci-dessus s'écrit

$$F(t) = F_h(t) + F_p(t) = F_h(t) + F_{p_1}(t) + F_{p_2}(t)$$

et la solution générale de l'équation de départ est enfin donnée par $f(x) = F(\ln(x))$;

(f) d'une EDLCC d'ordre 6 non homogène. Celle-ci se résout en cherchant la solution générale F_h de l'équation homogène associée (via les zéros du polynôme carcatéristique) ainsi qu'une solution particulière F_p : cette dernière peut être obtenue en cherchant des solutions particulières F_{p_1} et F_{p_2} des équations

$$D^6f(x) - 2D^4f(x) - 4D^2f(x) + 8f(x) = e^{\sqrt{2}x} \qquad \text{et} \qquad D^6f(x) - 2D^4f(x) - 4D^2f(x) + 8f(x) = \cos(x)$$

respectivement. Une solution F_{p_1} de la première équation peut être déterminée par la méthode des exponentielles polynômes (Notons que $\sqrt{2}$ est un zéro de multiplicité 2 du polynôme carcatéristique). Sachant que la seconde est à coefficients réels et que $\cos(t) = \mathcal{R}(e^{it})$, une solution F_{p_2} peut en être déterminée en prenant la partie réelle d'une solution particulière de l'équation

$$D^6 f(x) - 2D^4 f(x) - 4D^2 f(x) + 8f(x) = e^{it},$$

qui peut, quant à elle, être déterminée par la méthode des exponentielles polynômes (Notons que i n'est pas un zéro du polynôme carcatéristique).
Ainsi, la solution générale de l'EDLCC de départ s'écrit

$$F(t) = F_h(t) + F_p(t) = F_h(t) + F_{p_1}(t) + F_{p_2}(t)$$

(g) d'une équation à second membre homogène qui se réécrit

$$Dy(x) = \frac{\dfrac{y^2(x)}{x^2} - 2\dfrac{y(x)}{x} - 1}{\dfrac{y^2(x)}{x^2} + 2\dfrac{y(x)}{x} - 1}$$

Il suffit alors de poser $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ pour se ramener à une équation à second membre séparé, à savoir

$$Du(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{u^2(x) - 2u(x) - 1}{u^2(x) + 2u(x) - 1} - u(x)\right) \;;$$

(h) d'une équation à second membre linéaire.
(Voir cours théorique pour plus de détails concernant les méthodes de résolutions.)

IV. Equations différentielles - Résolution

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant (si possible) le domaine sur lequel on travaille (f et y sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $Dy(x) + y(x)\mathrm{cotg}(x) = 5e^{\cos(x)}$

(b) $xDf(x) - f(x) = x^2 e^x$

(c) $3y^2(x)Dy(x)x + y^3(x) = x + 1$

(d) $x^2 D^2 f(x) - 2f(x) = 2x - 1$**, sur** $]0, +\infty[$

(e) $Df(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{\sin(f(x))}$

(f) $D^2 y(x) + \omega^2 y(x) = \dfrac{1}{\cos(\omega x)}$

(g) $(x - f(x))Df(x) = f(x)$ **(Sugg. : poser** $u = \frac{f(x)}{x}$**)**

(h) $D^3 y(x) - 2D^2 y(x) + Df(x) = xe^x$

Les solutions générales de ces équations différentielles sont données par

(a) $y(x) = \dfrac{C - 5e^{\cos(x)}}{\sin(x)},\ x \in I$

(b) $f(x) = C|x| + xe^x,\ x \in \mathbb{R}$

(c) $xy^3(x) - \dfrac{x^2}{2} - x = C$

(d) $f(x) = C_1 x^2 + \dfrac{C_2}{x} - x + \dfrac{1}{2},\ x > 0$

(e) $x - \cos(x)\sin(x) - 2\cos(f(x)) = C$

(f) $C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x) + \dfrac{\cos(\omega x)}{\omega^2}\ln|\cos(\omega x)| + \dfrac{\omega}{x}\sin(\omega x),\ x \in J$

(g) $f(x) = C\exp\left(-\dfrac{x}{f(x)}\right)$

(h) $C_1 + (C_2 x + C_3)e^x + \dfrac{1}{6}(x^3 - 3x^2)e^x$

où

- $I = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et $J = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi + 2k\pi}{2\omega} : k \in \mathbb{Z}\right\}$,
- C, C_1, C_2, C_3 sont des constantes complexes arbitraires.

V. Dérivation des intégrales paramétriques

1. **Soient un réel a et une fonction f telle que $t \mapsto f(t)e^{-at}$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$. Montrer que la fonction**

$$x \mapsto F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$$

est dérivable sur $]a, +\infty[$ et que, dans cet intervalle, on a

$$DF(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-xt} f(t)\, dt.$$

Il s'agit d'une application du théorème des intégrales paramétriques avec $A =]0, +\infty[$ comme ensemble d'intégration (variable notée t) et $\Lambda =]a, +\infty[$ comme ouvert de variation du paramètre (paramètre noté x).
Seule la majoration uniforme de la dérivée première n'est pas immédiate.

Suggestion. Si K est un compact inclus dans Λ, alors il existe $r > a$ tel que $K \subset [r, +\infty[$. Il s'ensuit que

$$|D_x(e^{-xt} f(t))| = te^{-xt}|f(t)| \leq e^{-at}|f(t)|\; te^{-(r-a)t} \leq Ce^{-at}|f(t)| \quad \forall x \in K,\ t > 0,$$

où C est une constante.

2. **Calculer (si possible)**

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}\, e^{-x}\, dx$$

pour tous réels a, b.

L'intégrale existe et vaut $\dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+b^2}{1+a^2}\right)$.

3. **Calculer (si possible)**

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax) - \arctan(bx)}{x}\, dx \quad (a,\ b > 0).$$

L'intégrale existe et vaut $\dfrac{\pi}{2} \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

4. **Soit**

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x}\, dx, \quad t > -1.$$

   (a) Montrer que cette fonction est bien définie et est continûment dérivable sur $]-1, +\infty[$.

   (b) Calculer $F(0)$.

   (c) Montrer que $DF(t) = \dfrac{1}{t+1}$.

   (d) En déduire l'expression explicite (pas sous forme d'intégrale) de F.

Montrons que F est bien défini, c'est-à-dire que $x \mapsto f(x,t) = \dfrac{x^t - 1}{\ln x}$ est intégrable sur $]0, 1[$ pour tout $t > -1$.

(i) la fonction $x \mapsto f(x,t) = \dfrac{x^t - 1}{\ln x}$ est continue sur $]0, 1[$;

– Intégrabilité en 1^- : le théorème de l'Hospital montre que $\lim_{x\to 1^-} f(x,t) = 1 \in \mathbb{R}$; la fonction est donc intégrable en 1^-.

– Intégrabilité en 0^+ lorsque $t \geq 0$: on a $\lim_{x\to 0^+} f(x,t) = 0 \in \mathbb{R}$; la fonction est donc intégrable en 0^+.

– Intégrabilité en 0^+ lorsque $-1 < t < 0$: on a $\lim_{x\to 0^+} x^{-t} f(x,t) = 0 \in \mathbb{R}$; la fonction est donc intégrable en 0^+.

La seconde étape consiste alors à appliquer le théorème de dérivation des intégrales paramétriques. Vérifions-en les hypothèses : tout est direct sauf, peut-être, l'estimation uniforme de la dérivée.

Suggestion. On a $D_t f(x,t) = x^t$.

– Majoration lorsque $t \in [r,0]$ avec $-1 < r < 0$:

$$\sup_{t\in[r,0]} |D_t f(x,t)| = x^t \leq x^r \in L^1(]0,1[)$$

– Majoration lorsque $t \in [0,R]$ avec $R > 0$:

$$\sup_{t\in[0,R]} |D_t f(x,t)| = x^t \leq 1 \in L^1(]0,1[)$$

Les intégrales paramétriques donnent

$$DF(t) = \int_0^1 D_t f(t,x)\ dx = \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1}, \quad \forall\, t > -1$$

donc

$$F(t) = \ln(t+1) + \mathit{constante}, \quad \forall\, t > -1.$$

Comme $F(0) = 0$, on trouve *constante* $= 0$ et, finalement,

$$\int_0^1 f(t,x)dx = \ln(t+1), \quad \forall\, t > -1.$$

VI. Divers

1. **Si un médicament est administré en continu via une perfusion, la concentration $x(t)$ de ce médicament dans le sang est gouvernée par l'équation**

$$\frac{dx}{dt}(t) = \alpha - \beta x(t)$$

où α et β sont des constantes positives.
(a) Déterminer la concentration $x(t)$ à tout instant t.
(b) Déterminer vers quoi tend cette concentration à long terme.
(c) Déterminer la concentration à tout instant t si le moment initial ($t = 0$) correspond au moment où le médicament commence à être administré.

(a) La concentration du médicament à tout instant t est donnée par

$$x(t) = Ce^{-\beta t} + \frac{\alpha}{\beta}.$$

(b) A long terme, cette concentration tend vers $\frac{\alpha}{\beta}$.
(c) Puisque $x(0) = 0$, la concentration est dans ce cas donnée par

$$x(t) = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right).$$

2. **La distribution de la température $T(r)$ dans la région comprise entre deux cylindres concentriques de rayons $r = a$ et $r = b$ ($a < b$) est gouvernée par la loi**

$$r\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = 0 \quad \textbf{où} \quad T(a) = T_0,\ T(b) = T_1.$$

Déterminer $T(r)$.

La distribution de la température est donnée par

$$T(r) = \frac{T_0 \ln(\frac{r}{b}) - T_1 \ln(\frac{r}{a})}{\ln(\frac{a}{b})}.$$

3. **La distribution de la température $T(r)$ dans la région comprise entre deux sphères concentriques de rayons $r = a$ et $r = b$ ($a < b$) est gouvernée par la loi**

$$r\frac{d^2T}{dr^2} + 2\frac{dT}{dr} = 0 \quad \textbf{où} \quad T(a) = T_0,\ T(b) = T_1.$$

Déterminer $T(r)$.

La distribution de la température est donnée par

$$T(r) = \frac{T_0 - T_1}{b - a}\frac{ab}{r} + \frac{T_1 b - T_0 a}{b - a}.$$

4. **Dans les conditions d'équilibre des phases liquide-vapeur d'un corps pur, la formule de Clapeyron exprimant la chaleur latente L de changement d'état (volume de la phase liquide négligeable devant le volume de la phase gazeuse) s'écrit**

$$L = \frac{RT^2}{p}\frac{dp}{dT}.$$

De cette expression, donner la loi de variation de la pression p en fonction de la température T.
Si un système physique est tel que, à une température initiale T_0, la pression vaut p_0, déterminer la loi particulière de variation de la pression qui régit ce système.

La loi de variation de la pression qui régit ce système est donnée par

$$p(T) = C \exp\left(-\frac{L}{RT}\right)$$

où C est une constante complexe arbitraire. Tenant compte de la condition initiale $p(T_0) = p_0$, il vient que

$$C \exp\left(-\frac{L}{RT_0}\right) = p_0 \qquad \Rightarrow \qquad C = p_0 \exp\left(\frac{L}{RT_0}\right).$$

Dès lors, la loi particulière de variation de la pression qui régit ce système est

$$p(T) = p_0 \exp\left(\frac{L}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right).$$

5. **La croissance d'une tumeur peut être décrite par l'équation**

$$Dx(t) = rx(t) - \beta x^2(t)$$

où $x(t)$ désigne la taille (en cm^3) de la tumeur à tout instant t et où r et β sont des constantes positives.

Déterminer l'évolution de la taille d'une tumeur qui a une taille initiale de 1 cm^3.

L'équation régissant l'évolution de la tumeur est à second membre séparé : elle admet la solution générale

$$x(t) = \frac{Ce^{rt}}{1 + \frac{\beta}{r}Ce^{rt}}, \quad t \geq 0$$

où C est une constante complexe arbitraire, ainsi que les solutions singulières

$$x(t) = 0, \quad t \geq 0 \qquad \text{et} \qquad x(t) = \frac{r}{\beta}, \quad t \geq 0.$$

Tenant compte de la condition initiale $x(0) = 1$, on conclut directement que la solution $x = 0$ (pour laquelle $x(0) = 0 \neq 1$) est à rejeter et que la constante C doit vérifier

$$\frac{C}{1 + \frac{\beta}{r}} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{1}{1 + \frac{\beta}{r}}.$$

Par conséquent, la taille (en cm^3) de la tumeur à tout instant t est donnée par

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{rt}}{1 + \frac{\beta}{r}(e^{rt} - 1)} & \text{si } \frac{r}{\beta} \neq 1 \\ \dfrac{r}{\beta} & \text{si } \frac{r}{\beta} = 1 \end{cases}, \quad t \geq 0.$$