1, 2, 3...Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématiques générales : partim B

Répétition 4* : Physique

Correction

Version 1er mai 2016

Répétition 4* : paramétrages, intégrales sur une courbe et intégrales curvilignes

I. Paramétrages de courbes

Pour chacun des exercices suivants, on fixe un repère orthonormé $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ du plan.

1. **On donne les équations paramétriques suivantes de courbes du plan. Esquisser chacune de ces courbes et en donner une équation cartésienne.**

(a) $\begin{cases} x(t) = 1-2t \\ y(t) = -3+4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

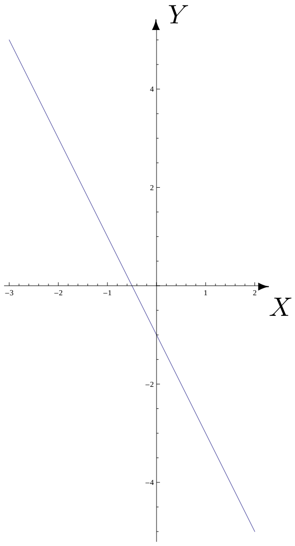
(b) $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = 2\sin(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

(c) $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = 4\sin(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

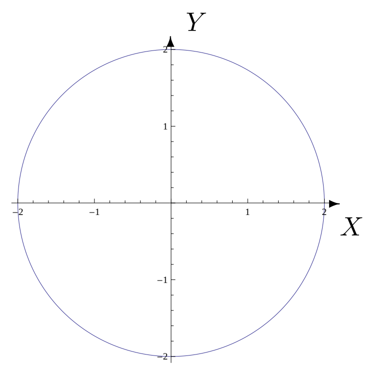
(d) $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$, $t \in [-1,1]$

(e) $\begin{cases} x(t) = -1+\frac{3}{2}\sin(t) \\ y(t) = \frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cos(t) \end{cases}$, $t \in [-\pi, 3\pi]$

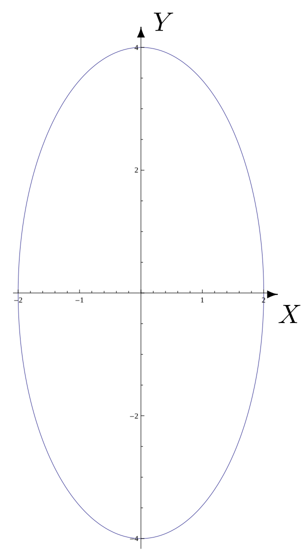
(f) $\begin{cases} x(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2} \\ y(t) = \frac{e^t-e^{-t}}{2} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$



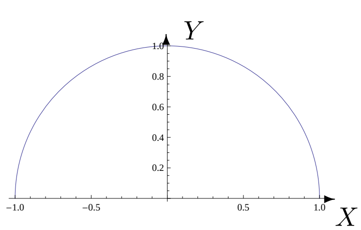
a) $2x+y+1=0$



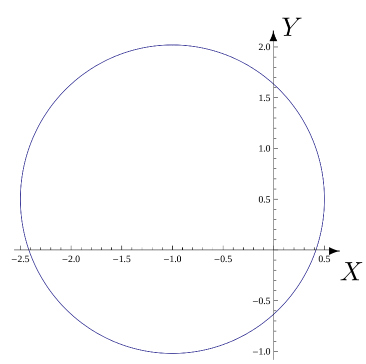
b) $x^2+y^2=4$



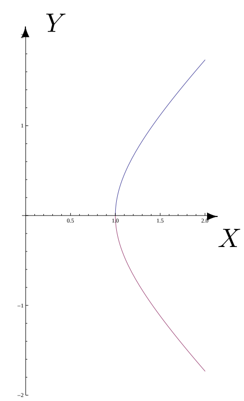
c) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$



d) $y=\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,1]$



e) $(x+1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{9}{4}$

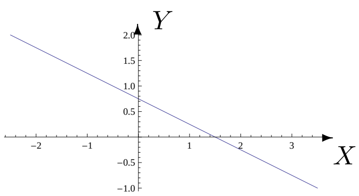


f) $x^2-y^2=1,\ x\in[1,+\infty[$

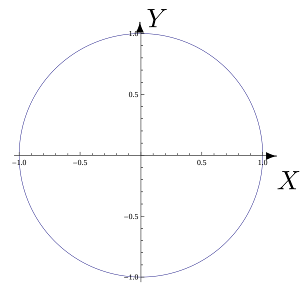
2. **On donne les équations cartésiennes suivantes de courbes du plan. Esquisser chacune de ces courbes et en donner des équations paramétriques.**

(a) $2x + 4y - 3 = 0$ **(c)** $x^2 + y^2 - 4y = 0$

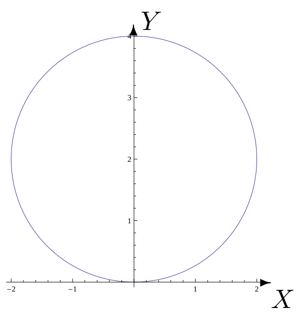
(b) $x^2 + y^2 = 1$ **(d)** $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$



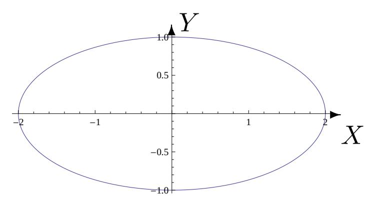
a) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t + \frac{3}{4} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$



b) $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$



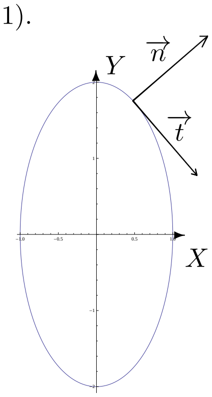
c) $\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\sin(t) + 2 \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$



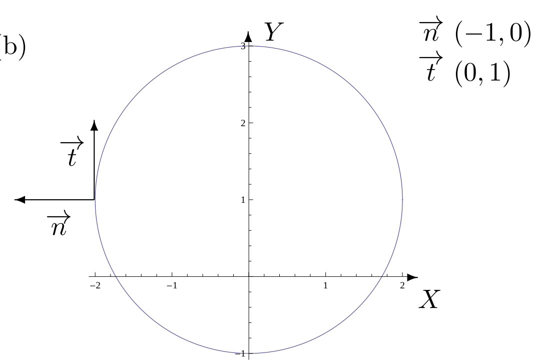
d) $\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$

3. **(a) Déterminer un vecteur normal ainsi qu'un vecteur tangent à la courbe plane d'équation cartésienne** $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ **au point de coordonnées** $(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$**. Donner une représentation de la courbe et de ces vecteurs.**
   (b) Faire de même pour la courbe plane d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ **au point de coordonnées** $(-2, 1)$**.**

(a) En calculant le gradient de $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1$, on obtient, par exemple, un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de composantes $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ dans un repère orthonormé. Un vecteur tangent $\overrightarrow{t}$ est obtenu en prenant un vecteur orthogonal au vecteur normal ci-dessus ; il a, par exemple, pour composantes $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$.



(b)



II. Calculs de longueurs, intégrales sur une courbe et intégrales curvilignes

1. **Déterminer la longueur des courbes données ci-dessous.**
   (a) L'hélice circulaire située sur un cylindre de rayon R et qui tourne une seule fois autour de ce dernier, la hauteur de chacun de ses points étant proportionnelle à l'angle de la portion du tour parcourue.
   (b) La trajectoire (représentée sur la FIG. 1 ci-dessous) décrite par un point fixé sur une roue de rayon $R = 1$ lorsque cette dernière effectue un tour complet (arcade de cycloïde).

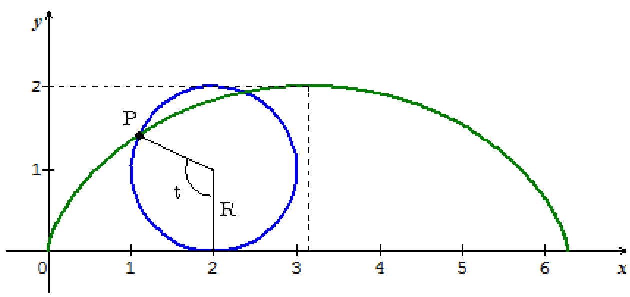


FIGURE 1 – Cycloïde de rayon R.

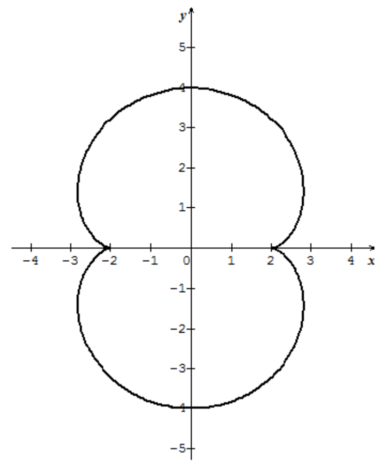


FIGURE 2 – Epicycloïde à 2 rebroussements, aussi appelée néphroïde.

   (c) L'épicycloïde à 2 rebroussements (représentée sur la FIG. 2 ci-dessus) dont une représentation paramétrique est
   $$(3\cos(t) - \cos(3t), 3\sin(t) - \sin(3t)),\ t \in [0, 2\pi].$$

   (a) Si on considère la représentation paramétrique $(R\cos(t),\ R\sin(t),\ ht)$ $(t \in [0, 2\pi])$, la hauteur de l'hélice valant $2\pi\, h$, la longueur demandée vaut $2\pi\sqrt{R^2 + h^2}$ (unités de longueur).
   (b) Si on considère la représentation paramétrique $(t - \sin(t),\ 1 - \cos(t))$ $(t \in [0, 2\pi])$, la longueur demandée vaut 8 (unités de longueur).
   (c) La longueur demandée vaut 24 (unités de longueur).

2. **Calculer les intégrales sur les courbes suivantes.**

   (a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\, ds$ **où** $\mathcal{C}$ **est le cercle centré en** $(0, 0)$ **et de rayon** 1**.**

   (b) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x + y)\, ds$ **où** $\mathcal{C}$ **est le cercle centré en** $(2, 1)$ **et de rayon** 2**.**

   (c) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\, ds$ **où** $\mathcal{C}$ **est l'arcade de cycloïde considérée à l'exercice 1.b).**

   Les intégrales valent respectivement $\pi,\ 12\pi$ et $256/15$.

3. **Calculer les intégrales curvilignes suivantes.**

   (a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\, dx$ **et** $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\, dy$ **où** $\mathcal{C}$ **est le cercle centré en** $(0, 0)$ **et de rayon** 1**.**

   Comparer ensuite ces deux intégrales à celle calculée à l'exercice 2.a).

(b) $\int_{\mathcal{C}} ydx + xdy$ **où** $\mathcal{C}$ **est le cercle centré en** $(0,0)$ **et de rayon** R**.**

(c) $\int_{\mathcal{C}} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ **où** $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{9} = 1,\ x,y \geq 0\right\}$**.**

(a) Les deux intégrales valent 0. On constate donc que même si l'intégrand et la courbe sur laquelle on intègre sont les mêmes, les résultats diffèrent.
(b) L'intégrale vaut 0.
(c) L'intégrale vaut $\sqrt{10} - \sqrt{2}$.

III. Divers

1. **On désigne par $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ les vecteurs d'une base orthonormée du plan. Une particule qui se déplace dans le plan est soumise à la force**
$$\overrightarrow{F} = (x - ay)\overrightarrow{e_1} + (3y - 2x)\overrightarrow{e_2}.$$
Calculer (en fonction du paramètre a) le travail exercé par cette force
(a) si la particule se déplace en ligne droite de l'origine au point de coordonnées $(2,4)$;
(b) si la particule effectue un tour le long d'un cercle centré à l'origine et de rayon 2 (dans le sens trigonométrique).

(a) Le travail exercé par la force (c'est-à-dire l'intégrale curviligne de F le long du segment) vaut $18 - 4a$ joules.
(b) Le travail exercé par la force (c'est-à-dire l'intégrale curviligne de F le long du cercle) vaut $4\pi(a-2)$ joules.

2. **Un fil est placé le long d'un demi-cercle de rayon 1 et son épaisseur est d'autant plus petite qu'il s'éloigne du diamètre joignant les extrémités de ce demi-cercle. Si la densité en un point du fil est proportionnelle à la distance entre ce point et la droite tangente au demi-cercle et parallèle au diamètre, déterminer**
(a) la masse de ce fil ; **(Sugg. : utiliser $(\star)$)**
(b) les coordonnées de son centre de masse. **(Sugg. : utiliser $(\star\star)$)**

Si on considère un repère orthonormé du plan dont
– l'origine est le centre du demi-cercle $\mathcal{C}$ considéré,
– le premier vecteur de base, noté $\vec{e}_1$, est un vecteur directeur normé du diamètre joignant les extrémités du demi-cercle,
– le second vecteur de base, noté $\vec{e}_2$, est un vecteur normé perpendiculaire à $\vec{e}_1$,
alors la densité du fil en un point (x,y) est donnée par
$$\rho(x,y) = k(1-y)$$
où k est une constante strictement positive et le demi-cercle est paramétré par
$$\vec{\gamma}\ :\ t \in [0,\pi] \mapsto \vec{\gamma}(t) = \cos(t)\vec{e}_1 + \sin(t)\vec{e}_2.$$
(a) La masse du fil est ainsi donnée par
$$m = \int_{\mathcal{C}} \rho(x,y)\, ds = \int_0^{\pi} k(1-\sin(t))\, dt = k(\pi - 2).$$
(b) Les coordonnées de son centre de masse sont (x_M, y_M) où
$$x_M = \frac{1}{m}\int_{\mathcal{C}} x\rho(x,y)\, ds = \frac{1}{\pi-2}\int_0^{\pi} \cos(t)(1-\sin(t))\, dt = 0$$
et
$$y_M = \frac{1}{m}\int_{\mathcal{C}} y\rho(x,y)\, ds = \frac{1}{\pi-2}\int_0^{\pi} \sin(t)(1-\sin(t))\, dt = \frac{4-\pi}{2\pi-4}$$

3. **Calculer le travail d'un satellite qui fait un demi-tour de la Terre en suivant une orbite de rayon R autour de l'équateur.**

   Le travail est nul.

4. **Le potentiel électrique en un point P situé à une distance r d'une charge ponctuelle q est donné par $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Dans ce contexte, nous considérons donc un repère orthonormé de l'espace dont l'origine coïncide avec la position de la charge.**
   (a) Calculer le champ électrique $\vec{E} = -\text{grad}\, V = -\vec{\nabla} V$ en tout point de l'espace.
   (b) Calculer la différence de potentiel entre les points $(1,0,1)$ et $(2,0,4)$, en calculant l'intégrale curviligne de $\vec{E}$
   - d'une part, le long du segment joignant ces deux points ;
   - d'autre part, le long du morceau de parabole situé dans le plan $y = 0$, passant par l'origine et joignant ces deux points.
   (c) Comparer ces deux résultats. Que devient la différence de potentiel si l'on considère un autre chemin joignant ces deux points ?
   (d) Calculer la différence de potentiel entre deux points situés à une même distance de la charge q.

   (a) Le champ électrique en tout point $P(x, y, z)$ de l'espace est doné par

   $$\vec{E} = -\text{grad}\, V = -\text{grad}\, \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r}$$

   où $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ est le vecteur position de P.
   (b) La différence de potentiel vaut dans les deux cas

   $$\Delta V = \frac{q(10\sqrt{2} - \sqrt{20})}{80\pi\epsilon_0}.$$

   (c) Quel que soit le chemin joignant les deux points donnés, la différence de potentiel restera inchangée puisque l'intégrale curviligne est indépendante du chemin : le champ électrique $\vec{E}$ est dit, dans ce cas, *conservatif.*
   (d) Si deux points sont situés à la même distance de la charge q, alors le potentiel électrique est identique en chacun d'eux : la différence de potentiel entre les deux est donc nulle.

5. **Une tornade de hauteur h emporte un arbre dans son vortex hélicoïdal [1], que nous supposons paramétré dans l'espace par**

   $$\vec{\gamma} \,:\, t \in [0, h] \mapsto [t\cos(t), t\sin(t), t] \in \mathbb{R}^3.$$

   (a) Calculer la longueur de la trajectoire parcourue par l'arbre dans le vortex lorsqu'il atteint le sommet de ce dernier.
   (b) En supposant que la masse de l'arbre vaut 900 kilos, calculer le travail effectué par la tornade pour amener l'arbre à la hauteur h.

   (a) La longueur de la trajectoire $\mathcal{T} = \vec{\gamma}([0, h])$ est donnée par

   $$L_{\mathcal{T}} = \int_{\mathcal{T}} ds = \int_0^h \|D\vec{\gamma}(t)\|\, ds = \int_0^h \sqrt{2 + t^2}\, ds = \ln(h + \sqrt{h^2 + 2}) - \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{h}{2}\sqrt{h^2 + 2}$$

   (unités de longueur).
   (b) En considérant $g = 10\text{m/s}^2$, le travail exercé vaut $-mgh = -9000h$ joules.

1. En météorologie, dans les tornades et cyclones, on parle de vortex pour désigner une circulation atmosphérique tourbillonnaire (spécifique d'une dépression) matérialisée par l'enroulement d'une ou plusieurs bandes nuageuses spiralées autour d'un centre de rotation.
Ici, on considère que la trajectoire des vents constituant le vortex correspond à une spirale qui monte, centrée sur un axe vertical, et qui s'éloigne de ce dernier.