Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématiques générales : partim B

Répétition 5* : Physique

Correction

Version 3 mai 2016

Répétition 5* : intégrales de surfaces et formules de Gauss, Green et Stokes

I. Paramétrages et intégrales de surfaces

1. **Soit $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère orthonormé de l'espace. On donne l'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.**
(a) Représenter l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient cette équation. Comment s'appelle cet ensemble ?
(b) Déterminer un paramétrage de la surface $\mathcal{S}$ correspondant aux points de cet ensemble dont la cote z est comprise entre 0 et 4.
(c) Calculer l'aire de cette surface $\mathcal{S}$.

(a) Il s'agit d'un cône circulaire droit dont l'axe de symétrie de rotation est Oz.

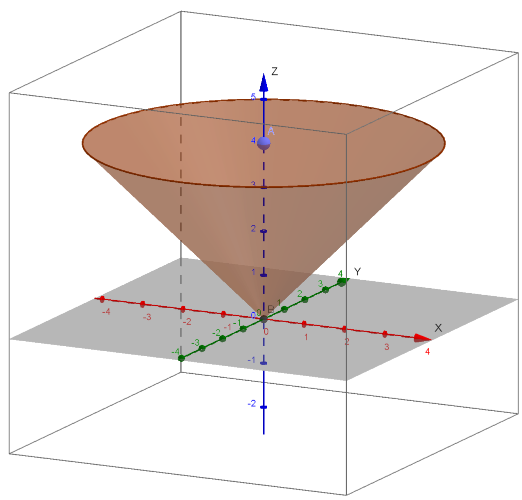

Figure 1 – Représentation de $\mathcal{S}$.

(b) Un paramétrage injectif continument dérivable de $\mathcal{S}$ est par exemple

$$\vec{\Phi}\ :\ (u, v) \in [0, 4] \times [0, 2\pi] \mapsto [u\cos(v), u\sin(v), u].$$

(c) Dès lors, l'aire de $\mathcal{S}$ est donnée par

$$\iint_{\mathcal{S}} d\sigma = \int_0^4 \int_0^{2\pi} \|D_u\vec{\Phi} \wedge D_v\vec{\Phi}\|\ du\ dv = \sqrt{2}\int_0^4 \int_0^{2\pi} u\ du\ dv = 16\sqrt{2}\pi$$

(unités d'aire).

2. **Dans un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan, on considère l'arcade de cycloïde paramétrée par**

$$(t - \sin t,\ 1 - \cos t)\ ,\quad t \in [0, 2\pi].$$

(a) Déterminer un paramétrage de la surface $\mathcal{A}$ délimitée par cette arcade de cycloïde et l'axe des abscisses.
(b) Calculer l'aire de cette surface $\mathcal{A}$.

(a) Un paramétrage injectif continument dérivable de $\mathcal{A}$ est par exemple

$$\vec{\Phi}\ :\ (u, t) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \mapsto [t - \sin(t), u(1 - \cos(t))].$$

(b) Dès lors, l'aire de $\mathcal{A}$ est donnée par

$$\iint_{\mathcal{A}} d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \|D_u\vec{\Phi} \wedge D_t\vec{\Phi}\| \, dt \, du = \sqrt{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} - 2\cos(t) + \frac{1}{2}\cos(2t) \, dt \, du = 3\pi$$

(unités d'aire).

3. **Calculer $\iint_{\mathcal{B}} x^2 z \, d\sigma$ où $\mathcal{B}$ est le bord du borné fermé de l'espace défini par les relations**

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad z \in [0, 1].$$

L'intégrale vaut $\frac{3\pi}{4}$.

II. Formules de Gauss, Green et Stokes

1. **(a) Vérifier la formule de Green pour la fonction vectorielle $\vec{f}(x, y) = [x^2 + y^2, x^2 - y^2]$ et la surface**

$$\mathcal{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq y \leq 2 - x^2\right\}.$$

Représenter $\mathcal{A}$.

Les intégrales des deux membres de la formule ont pour valeur $\frac{56}{15}$.

(b) Même question pour $\vec{f}(x, y) = [2x, -y]$ et la surface $\mathcal{B}$ bornée du plan dont les points ont une ordonnée positive et délimitée par le cercle centré à l'origine et de rayon 1 et les droites d'équation cartésienne $x = y$ et $x = -y$.

Les intégrales des deux membres de la formule sont nuls.

2. **Calculer l'intégrale suivante en appliquant la formule de Green :**

$$\int_{\mathcal{C}} -x^2 y dx + xy^2 dy$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle centré à l'origine et de rayon R (on considère l'orientation ≪ aire à gauche ≫).

L'application de la formule de Green au calcul de l'intégrale demandée conduit à la valeur $\frac{\pi R^4}{2}$.

3. **(a) Vérifier le théorème de la divergence avec les données suivantes : $\vec{f}(x, y, z) = [4x, 3z, 5y]$ et $\mathcal{S}$ est la surface du cône (portion de cône)**

$$\left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, z \in [0, 2]\right\}.$$

Les intégrales des deux membres de la formule ont pour valeur $\frac{32\pi}{3}$.

(b) Même question pour la fonction $\vec{f}(x, y, z) = [x^2 + y^2, xy, z^2 + 1]$ et le borné fermé V du premier octant limité par le plan $z = 2y$ et le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 9$.

Les intégrales des deux membres de la formule ont pour valeur $\frac{81(\pi + 3)}{4}$.

4. **(a) Vérifier la formule de Stokes dans le cas de la fonction $\vec{f}(x, y, z) = [y^2, x^2, -x + z]$ et du triangle de sommets de coordonnées $(0, 0, 1), (1, 0, 1)$ et $(1, 1, 1)$.**

Les intégrales des deux membres de la formule ont pour valeur $\frac{1}{3}$.

(b) Même question pour la fonction $\vec{f}(x, y, z) = [x^2y, 0, xyz]$ et la surface composée de la portion du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ limitée par les plans $z = 0$ et $z = 2$ et l'ensemble

$$\left\{(x, y, 2) : x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Les intégrales des deux membres de la formule ont pour valeur -4π.

III. Divers

1. **Un dispositif d'éclairage est muni d'un élément réflecteur dont la forme est obtenue par rotation de la branche de parabole $y = \sqrt{z}$ ($y \in [0, 1]$) autour de l'axe OZ. Déterminer l'aire du réflecteur.**

   Le réflecteur $\mathcal{R}$ est paramétré par

   $$\vec{\Phi} \; : \; (z, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \mapsto [\sqrt{z}\cos(\theta), \sqrt{z}\sin(\theta), z]$$

   qui est injectif et continûment dérivable sur $[0, 1] \times [0, 2\pi]$.
   L'aire du réflecteur est alors donnée par

   $$\iint_{\mathcal{R}} d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \|D_z\vec{\Phi} \wedge D_\theta\vec{\Phi}\| \, d\theta \, dz = \sqrt{2} \int_0^4 \int_0^{2\pi} \sqrt{z + \frac{1}{4}} \, d\theta \, dz = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$$

   (unités d'aire).

2. **La température T en un point d'une boule métallique est proportionnelle au carré de la distance au centre de la boule. Calculez le taux de transmission de chaleur à travers une sphère $\mathcal{S}$ de rayon R centrée au centre de la boule.**
   (Sugg. : utiliser ($\star$))

   Si le centre de la boule occupe l'origine du repère orthonormé dans lequel on travaille, la température est donnée par

   $$T(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2)$$

   où C est une constante de proportionnalité. Le transfert de chaleur est caractérisé par

   $$\vec{F}(x, y, z) = -K \operatorname{grad} T = -KC \left(2x\vec{e}_1 + 2y\vec{e}_2 + 2z\vec{e}_3\right)$$

   où K est la conductivité du métal.
   Sachant que, en utilisant les coordonnées sphériques, la sphère de rayon R est paramétrée par

   $$\vec{\Phi} \; : \; (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \mapsto [R\sin(\theta)\cos(\varphi), R\sin(\theta)\sin(\varphi), R\cos(\theta)],$$

   le taux de transmission de chaleur à travers la sphère $\mathcal{S}$ est donné par

   $$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \bullet \vec{n} \, d\sigma &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\vec{F} \bullet \vec{n}\right)\left(\vec{\Phi}(\varphi, \theta)\right) \|D_\varphi\vec{\Phi} \wedge D_\theta\vec{\Phi}\| \, d\varphi \, d\theta \\ &= -2KCR \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \|D_\varphi\vec{\Phi} \wedge D_\theta\vec{\Phi}\| \, d\varphi \, d\theta \\ &= -8\pi R^3 KC \end{aligned}$$

   puisque $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \|D_\varphi\vec{\Phi} \wedge D_\theta\vec{\Phi}\| \, d\varphi \, d\theta = \iint_{\mathcal{S}} d\sigma$ correspond à l'aire de la sphère, c'est-à-dire $4\pi R^2$.

3. **Un champ magnétique est donné par**

$$\vec{B} = \left(5x + \sin(y^2 z)\right)\vec{e}_1 + (\arctan(xz) + 4y)\,\vec{e}_2 + (\cos(xy) - 6z)\,\vec{e}_3$$

Calculer le flux de ce champ magnétique au travers de la surface fermée $\mathcal{S}$ correspondant au bord d'un cube d'arête égale à 2 centré à l'origine. **(Sugg. : remplacer l'intégrale de surface par une autre)**

La formule de Gauss (divergence) stipule que le flux d'un champ vectoriel donné au travers d'une surface fermée $\mathcal{S}$ est égale à l'intégrale de la divergence de ce champ sur le borné fermé délimité par $\mathcal{S}$. Dans notre cas, la divergence du champ magnétique considéré vaut 3 et donc le flux cherché est donné par

$$\iiint_K 3\;dx\;dy\;dz = 3\iiint_K \;dx\;dy\;dz$$

où K est le borné fermé correspondant au cube. Puisque $\iiint_K \;dx\;dy\;dz$ correspond au volume de ce borné fermé, c'est-à-dire 8 (unités de volume), le flux cherché vaut 24.

4. **La formule de Green, stipulant que**

$$\iint_K D_x f_2 - D_y f_1 \;dxdy = \oint_{\mathcal{C}^+} f_1 dx + f_2 dy$$

où K est un borné fermé du plan, $\mathcal{C}^+$ son bord orienté « aire à gauche » et $\vec{f} = (f_1, f_2)$ une fonction vectorielle continûment dérivable sur un ouvert contenant K, peut être utilisée pour déterminer l'aire d'une surface plane : en effet, en prenant $f_2 = x$ et $f_1 = 0$ (resp. $f_1 = -y$ et $f_2 = 0$), on obtient

$$\iint_K \;dxdy = \oint_{\mathcal{C}^+} x\;dy \qquad \left(\textbf{resp. } \iint_K \;dxdy = \oint_{\mathcal{C}^+} -y\;dy\right).$$

Utiliser ce fait pour calculer l'aire d'une ellipse d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$.

L'aire d'une ellipse d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ vaut πab.

5. **Un champ électrique est donné par**

$$\vec{B} = \left(e^x + 2y + \sin(x^2 z)\right)\vec{e}_1 + (12x + \arctan(yz))\,\vec{e}_2 + \cos(xyz)\vec{e}_3$$

Calculer la circulation de ce champ électrique le long de l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. **(Sugg. : remplacer l'intégrale curviligne par une autre)**

Le théorème de Stokes stipule que la circulation cherchée est égale à

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}(\vec{B}) \bullet \vec{n}\;d\sigma$$

où $\mathcal{S}$ est la surface planaire délimitée par l'ellipse et où $\vec{n}$ est la normale unitaire à cette surface. Si on choisit $\vec{n} = \vec{e}_3$ comme vecteur normal unitaire, il vient que

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) \bullet \vec{n} = [\star, \star, 10] \bullet [0, 0, 1] = 10$$

et donc que la circulation de $\vec{B}$ le long de l'ellipse, <u>dans le sens trigonométrique</u>, est donnée par

$$\iint_{\mathcal{S}} 10\;d\sigma = 10\iint_{\mathcal{S}} \;d\sigma = 20\pi$$

puisque $\iint_{\mathcal{S}} \;d\sigma$ correspond à l'aire de l'ellipse, à savoir 2π (cf. exercice précédent).

6. **On désire commercialiser un nouveau vide-pomme de section carrée de côté $2l$.On étudie la trace laissée par ce vide-pomme dans une pomme supposée parfaitement sphérique de rayon R lorsque le vide-pomme est parfaitement aligné sur le centre de la pomme (cf. FIG. 2 ci-dessous). On suppose que $R > \sqrt{2}l$, c'est-à-dire que ≪ le vide-pomme est plus petit que la pomme ≫.**

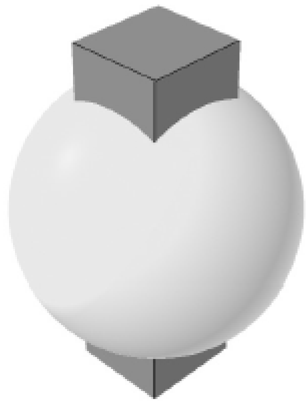

FIGURE 2 – Pomme traversée par le vide-pomme

(a) Calculer le périmètre de la découpe laissée par le vide-pomme de part et d'autre de la pomme.
(b) Si le rayon de la pomme mesure $\frac{3}{2}\sqrt{7}$ centimètres et que le côté de la section carrée du vide-pomme mesure $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ centimètres, calculer le périmètre de la découpe laissée par le vide-pomme de part et d'autre de la pomme.
(c) Donner une expression intégrale de la surface totale de la peau de la pomme ôtée par le vide-pomme.

(a) Un paramétrage injectif et continûment dérivable de cette découpe est donné par

$$\vec{\gamma} \; : \; y \in [0, l] \mapsto \left[l, y, \sqrt{R^2 - l^2 - y^2}\right]$$

Le périmètre de la découpe laissée par le vide-pomme est donné par

$$8\sqrt{R^2 - l^2} \arcsin\left(\frac{l}{\sqrt{R^2 - l^2}}\right).$$

(b) Dans ces conditions, ce périmètre vaut 8π centimètres.

(c) La surface Σ de la peau de la pomme située dans le premier octant $(x, y, z \geq 0)$ est paramétrée par

$$\vec{\Phi} \; : \; (x, y) \in [0, l] \times [0, l] \mapsto \left[x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right]$$

qui est injectif et continûment dérivable sur $[0, l] \times [0, l]$. Vu la symétrie, l'aire totale de la peau ôtée par le vide-pomme est donnée par

$$8 \iint_{\Sigma} d\sigma = 8 \int_0^l \int_0^l \|D_x\vec{\Phi} \wedge D_y\vec{\Phi}\| \, dx \, dy = 8R \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy$$

(unités d'aires).