Université de Liège

1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématique (partim B)

CORRECTION DES LISTES D'EXERCICES DU $2^{\text{ÈME}}$ QUADRIMESTRE : CHIMIE, GÉOLOGIE, INFORMATIQUE ET PHYSIQUE

Version 25 janvier 2016

Liste 1 : calcul matriciel (1)

I. Opérations entre matrices

1. **Soient les matrices A, B, C données par**

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1+i & -1 \\ \frac{3}{i} & (2-i)^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ i & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{i+1} \\ -2i & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

1) $A+B$, 2) $A+\widetilde{B}$, 3) $A.B$, 4) $A.B+C$, 5) $B.A$, 6) $C.\widetilde{A}$, 7) $A^*.C$, 8) $i.C$, 9) $(i.A)^*$.

1) $A+B$ est impossible à calculer car les matrices n'ont pas le même format.

2) $A+\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2+i & -2i \\ i & 3 & 1-4i \end{pmatrix}$ 3) $A.B = \begin{pmatrix} 8+i & 4+10i \\ 3+5i & -10+8i \end{pmatrix}$

4) $A.B+C = \begin{pmatrix} 11+i & \frac{9+19i}{2} \\ 3+3i & \frac{-20+17i}{2} \end{pmatrix}$ 5) $B.A = \begin{pmatrix} 4 & 2+2i & -6i \\ 2+4i & -3+i & 12-19i \\ 0 & 1+i & -3+8i \end{pmatrix}$

6) $C\widetilde{A}$ est impossible à calculer car le nombre de colonnes (2) de C n'est pas égal au nombre de lignes (3) de $\widetilde{A}$.

7) $A^*C = \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2}-i \\ 3-i & -\frac{3i}{2} \\ 8+3i & \frac{-1+6i}{2} \end{pmatrix}$ 8) $iC = \begin{pmatrix} 3i & \frac{1+i}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

9) $(iA)^* = \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ -1-i & i \\ 3 & 4-3i \end{pmatrix}$

2. **Soit A une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{ij}=1, \forall i,j$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.**

Calculer $C = AB - BA$ et en déduire la forme de $\widetilde{C} + C$.

On a $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{C}+C$ est la matrice nulle de dimension 3.

3. **On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 2A + 3I = 0$.**

4. **Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec**

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$

La forme générale des matrices qui commutent avec A est du type $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$.

La forme générale des matrices qui commutent avec B est du type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ si $a \neq b$.
Si $a = b$ alors toute matrice de dimension 2 commute avec B car B est dans ce cas un multiple de la matrice identité.

II. Déterminants

1. **Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.**

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-i & 3i \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ (i+1)^2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix},$$

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & \sin^2(a) & \cos^2(a) \\ 1 & \sin^2(b) & \cos^2(b) \\ 1 & \sin^2(c) & \cos^2(c) \end{pmatrix} \ (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

Le déterminant de A vaut $\frac{1}{9}(8-i)$, celui de B vaut 1, celui de C vaut 90, celui de D vaut $-\frac{7}{2}$ et celui de E est nul.

2. **Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en $x \in \mathbb{C}$. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.**

$$A = \begin{pmatrix} i & x+2 \\ -x & -i \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} x & -4 \\ 1 & x \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 0 & x+1 & x \\ 1 & 0 & x-2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est égal à $(x+1)^2$; celui de B est égal à
$(x+2i)(x-2i)$, celui de C vaut $(x+1)^2(x-3)$ et celui de D vaut $-x^2(x+2)(x-1)^2$.

III. Inversion de matrices

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice inverse de A est $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- La matrice B ne possède pas d'inverse car son déterminant est nul.
- La matrice inverse de C est égale à son inverse.
- La matrice inverse de D est $D^{-1} = \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ i & i & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice inverse de E est $E^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -i & -i \\ i & -1 & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Liste 2 : calcul matriciel (2)

I. Diagonalisation

1. **Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en donner la multiplicité.**

$$A = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Les valeurs propres de la matrice A sont $-1+i$ et $1+i$; ces valeurs propres sont simples (c'est-à-dire de multiplicité 1).
   Les valeurs propres de la matrice B sont 2 (valeur propre double) et 3 (valeur propre simple).
   Les valeurs propres de la matrice C sont $-4,\ 1$ et 3 ; ces valeurs propres sont simples.

2. **Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale Δ, ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Calculer les produits AS et $S\Delta$. Comparer les matrices obtenues. N'aurait-on pas pu prévoir ce resultat sans effectuer les calculs ? Pourquoi ?

   • Matrice A : 2 valeurs propres simples : -2 et 5 ; la matrice est donc diagonalisable.
   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont du type $c\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$ et ceux relatifs à la valeur propre 5 sont du type $c'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.
   On a, par exemple, $\Delta = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.
   Dès lors, en effectuant les produits, on a $AS = S\Delta = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$. Comme A est diagonalisable, on a $\Delta = S^{-1}AS \Leftrightarrow S\Delta = AS$ en multipliant les deux membres à gauche par S.

   • Matrice B : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double -1.
   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -1 sont du type $c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.
   Comme cette valeur propre n'engendre pas 2 vecteurs propres linéairement indépendants, la matrice n'est pas diagonalisable.
   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.

• Matrice C : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double -1.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -1 sont du type $c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls. Cette matrice est donc diagonalisable car elle possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

On a, par exemple, $\Delta = S^{-1}CS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

• Matrice D : 3 valeurs propres simple : -4, 1 et 3 ; la matrice est donc diagonalisable.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -4 sont du type $c \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$; les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont du type $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c_2 \in \mathbb{C}_0$ et les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 3 sont du type $c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c_3 \in \mathbb{C}_0$.

On a, par exemple, $\Delta = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3. **Une matrice carrée A de dimension 2 possède les deux valeurs propres 1 et -1, auxquelles peuvent être associés respectivement les vecteurs propres $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Que vaut A ?**

   La matrice A est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

II. Divers

1. **L'institut météorologique a fait les observations suivantes :**
   – on n'a jamais vu deux jours ensoleillés consécutifs,
   – s'il fait beau un jour donné, on a une chance égale d'avoir de la pluie ou de la neige le lendemain,
   – s'il pleut ou s'il neige, on a une chance sur deux que le temps se maintienne le jour suivant et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.
   Sachant cela,
   (a) **Représenter la matrice de transition de ce système.**

(b) **Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quel pourcentage de chance a-t-on qu'il fasse beau dans deux jours ?**

(c) **A long terme, quelle sera l'évolution du climat ?**

(a) Si on note N_0, P_0 et S_0 respectivement un jour de neige, un jour de pluie et un jour de soleil au départ et N_1, P_1 et S_1 la météo correspondante le jour suivant, on a

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ P_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ P_0 \\ S_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de dimension 3 est la matrice de transition du système.
(b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, on a 25 % de chance qu'il fasse beau dans 2 jours.

(c) Le vecteur de probabilité de valeur propre 1 est égal à $\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,2 \end{pmatrix}$. A long terme, on 4 chances sur 10 qu'il neige, 4 chances sur 10 qu'il pleuve et 2 chances sur 10 qu'il fasse ensoleillé.

2. **Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.**
L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 70 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 10.
S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 6 fois sur 10 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.
Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.

   (a) **Si un lapin vient de manger des carottes, quelle est la probabilité qu'il mange de la salade dans deux repas ?**

   (b) **A longue échéance, que mange ce lapin ?**

   (a) S'il vient de manger des carottes, le lapin a 30 % de chance de manger de la salade dans deux repas.
   (b) A longue échéance, le lapin a 40 % de chance de manger des carottes ou de la salade et 20% de chance de manger des pissenlits.

3. **En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle θ) est représentée par une matrice du type**

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où θ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).
– **Pour tout θ, déterminer la matrice produit M_θ^2 et en simplifier les éléments au maximum.**

On a

$$M_\theta^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

– **Montrer que quels que soient θ, θ', les matrices M_θ et $M_{\theta'}$ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?**
On a

$$M_\theta M_{\theta'} = M_{\theta'} M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que l'ordre dans lequel on effectue les rotations n'a pas d'importance.

– **Montrer que quel que soit le réel θ, la matrice**

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

est aussi une matrice qui représente une rotation.

On a

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$

C'est donc aussi une matrice de rotation mais la rotation s'effectue dans le sens inverse de la rotation d'angle θ.

4. **Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto -x^2 - y^2 + xy + 2x - 4y + 3$.**

a) Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{l} D_x f(x,y) = 0 \\ D_y f(x,y) = 0 \end{array} \right.$

b) Calculer les dérivées secondes de f.

c) Notons $H_f(x, y)$ la matrice $\begin{pmatrix} D_x^2 f & D_x D_y f \\ D_y D_x f & D_y^2 f \end{pmatrix}$.

Calculer det$H_f(x, y)$ si (x, y) est la (les) solution(s) du système ci-dessus.

a) Ce système a pour solution $(0, -2)$.
b) On a $D_x^2 f = -2,\ D_y^2 f = -2$ et $D_x D_y f = D_y D_x f = 1$.
c) Le déterminant de $H_f(0, -2)$ vaut 3.

d) **Mêmes questions avec la fonction $g : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$.**
- Le système a pour solution les couples $(-1, -1)$ et $(3, 3)$.
- On a $D_x^2 g = 2,\ D_y^2 g = 2y$ et $D_x D_y g = D_y D_x g = -2$.
- Le déterminant $H_g(-1, -1)$ vaut -8 et le déterminant $H_g(3, 3)$ vaut 8.

5. **Vrai ou faux (Justifier)**

(a) **Toute matrice carrée de dimension 3 commute avec** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Faux : si on multiplie la matrice donnée notée A à gauche et à droite par une matrice quelconque notée B du type $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ dont les élements sont des complexes quelconques, on a, par exemple, que la troisième ligne de AB est le vecteur nul alors que la troisième ligne de BA a pour premier élément g.

(b) **La matrice** $\begin{pmatrix} a-b & a^2-ab+b^2 \\ a^2-b^2 & a^3-b^3 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$ **est inversible.**
Faux car le déterminant de cette matrice vaut 0 si $a = b$ ou si $b = 0$.

(c) **Si une matrice carrée A de dimension 2 est de déterminant nul, alors l'une des colonnes de A est multiple de l'autre.**
Vrai (cf. théorie)

(d) **Si deux lignes d'une matrice carrée A de dimension 3 sont identiques, alors** $\det A = 0$**.**
Vrai (cf. théorie)

(e) **Si A est une matrice carrée de dimension 3, alors** $\det(5A) = 5 \det A$**.**
Faux : $\det(5A) = 5^3 \det A = 125 \det A$

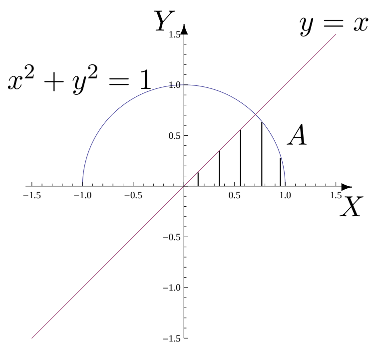
(f) **Si B est la matrice obtenue en multipliant la ligne 3 d'une matrice carrée A de dimension 3 par 5, alors** $\det B = 5 \det A$**.**
Vrai (cf. théorie)

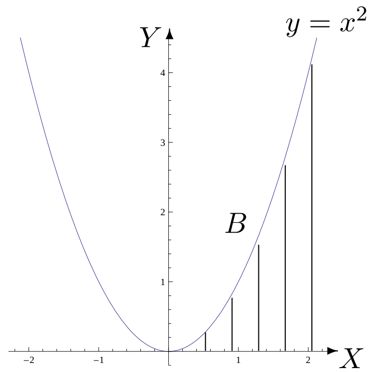
Liste 3 : compléments

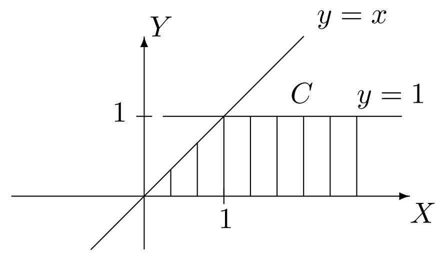
I. Représentation d'ensembles

1. **Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

   a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{1-x^2}\}\}$
   b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2\}$
   c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y,\ y \in [0,1]\}$

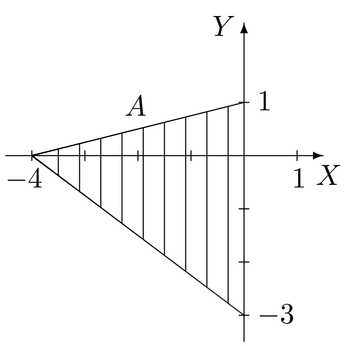


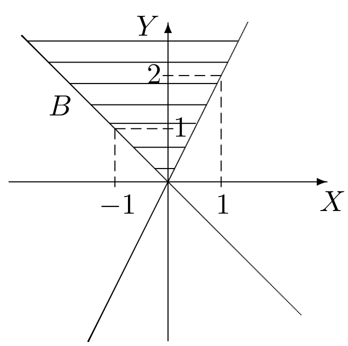


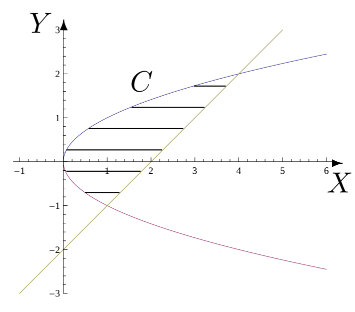


Les points des bords sont compris dans les ensembles.

2. **Décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble, en donnant d'abord**
   a) l'ensemble de variation des abscisses
   b) l'ensemble de variation des ordonnées.





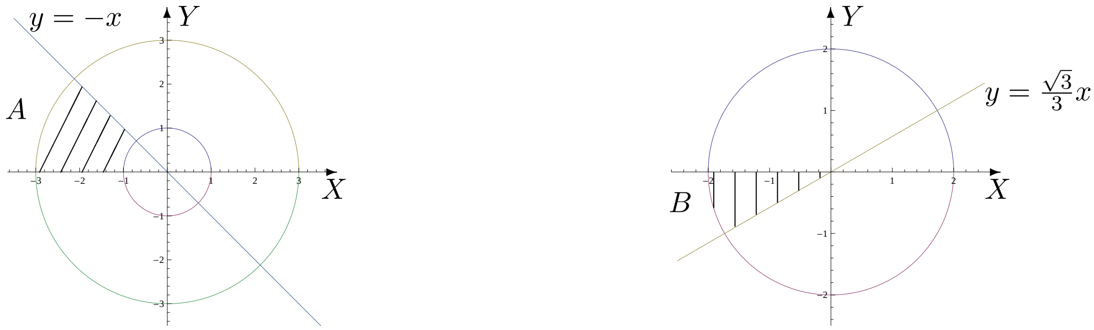


Les descriptions analytiques sont les suivantes
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-4,0],\ y \in [-\frac{3}{4}x - 3, \frac{x}{4} + 1]\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-3,0],\ x \in [-\frac{4}{3}y - 4, 0]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in [4(y-1),\ 0]\}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in [-y,\ \frac{y}{2}\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in\ ]-\infty,0],\ y \in [-x,+\infty[\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\ +\infty[,\ y \in [2x,\ +\infty[\}$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,2],\ x \in [y^2, y+2]\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \in [-\sqrt{x}, \sqrt{x}]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,4],\ y \in [x-2, \sqrt{x}]\}.$

3. **En utilisant les coordonnées polaires, décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans A mais non dans B.**



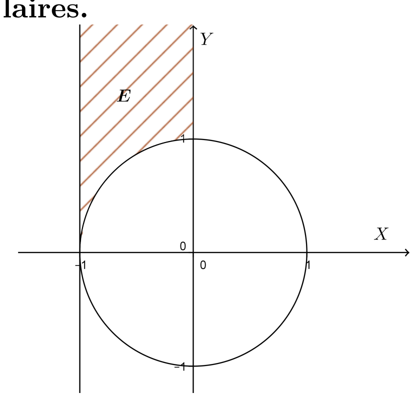
Les ensembles A et B exprimés en coordonnées polaires sont respectivement

$$A' = \left\{(r,\theta) : r \in [1,3],\ \theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]\right\} \quad \text{et} \quad B' = \left\{(r,\theta) : r \in]0,2[,\ \theta \in \left]\pi, \frac{7\pi}{6}\right[\right\}.$$

4. **Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est**

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 > 1\}.$$

Ensuite, décrire analytiquement cet ensemble en utilisant les coordonnées polaires.



Les points des bords sont exclus de l'ensemble.
L'ensemble E exprimé en coordonnées polaires est

$$E' = \left\{(r,\theta) : \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[,\ r \in \left]1, \frac{-1}{\cos(\theta)}\right[\right\}.$$

II. Dérivation

1. **En appliquant la définition, montrer que la fonction est dérivable en x_0 et donner la valeur de sa dérivée en ce point si**
   a) $f : x \mapsto |x^2 - 4|$ et $x_0 = 1$
   b) $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ et $x_0 = 2$
   Ces deux fonctions sont dérivables en x_0 ; la dérivée de f en 1 vaut -2 et celle de g en 2 vaut $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. **a) On donne la fonction f dérivable sur $]-1,1[$. Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x) = f(\ln(2x))$ ainsi que l'expression de sa dérivée en fonction de celle de f ?**
   Le domaine de dérivabilité de F est $\left]\frac{1}{2e}, \frac{e}{2}\right[$ et sa dérivée vaut $DF(x) = \frac{1}{x}(Df)(\ln(2x))$.

b) Même question pour g dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ avec $G(x) = g(\arcsin(2x+1))$.

Le domaine de dérivabilité de G est $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$ et sa dérivée vaut

$$DG(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - x}}(Dg)(\arcsin(2x+1)).$$

III. Cacul intégral

1. a) **a) Si a est un paramètre réel fixé dans $]0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $f_1 : x \mapsto x^2 \sin(ax)$ est-elle intégrable sur $[0,1]$? Si oui, que vaut son intégrale ?**

   La fonction est continue sur le fermé borné $[0,1]$; elle y est donc intégrable et son intégrale vaut
   $$\left(\frac{2}{a^3} - \frac{1}{a}\right)\cos(a) + \frac{2}{a^2}\sin(a) - \frac{2}{a^3}.$$

   b) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_2 : x \mapsto \frac{a\ e^{-a^2}}{a^2+x}$ est-elle intégrable sur $[0, a^2]$? Si oui, que vaut son intégrale ?

   La fonction est continue sur le fermé borné $[0, a^2]$; elle y est donc intégrable et son intégrale vaut $a \ln 2\ .\ e^{-a^2}$.

   c) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{a}}{x^2+a^2}$ est-elle intégrable sur $[a, +\infty[$? Si oui, que vaut son intégrale ?

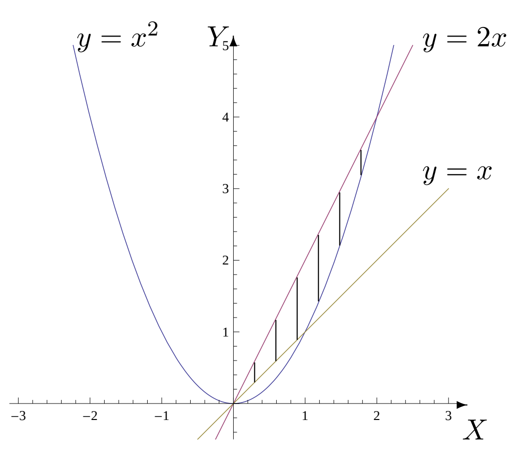
   La fonction est continue sur $[a, +\infty[$ et, par application de la définition ou du critère en θ, elle est intégrable en $+\infty$donc sur $[a, +\infty[$. Son intégrale vaut $\dfrac{\pi\sqrt{a}}{4a}$.

2. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes**
   $$a) \int_0^1 \ln(x)\ dx \qquad\qquad b) \int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2-4}\ dx$$

   Ces deux fonctions sont intégrables. La première intégrale vaut -1 et la deuxième $\frac{1}{4}\ln 3$.

3. **On considère l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x,\ \ y \geq x^2\}$. Donner une représentation graphique de cet ensemble en le hachurant et calculer l'aire de cette région du plan.**

   L'aire de la région hachurée vaut $\dfrac{7}{6}$.



IV. Divers

1. **Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut**
$$K_C = 50 = \frac{1,56^2}{(A-0,78).0,22}$$
Que vaut A sachant que A représente la quantité de matière introduite dans le milieu réactionnel ?

   La quantité de matière A introduite dans le milieu réactionnel vaut 1,001 mol.

2. **Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut**
$$K_C = 4 = \frac{x}{(0,5-x)(0,25-x)}$$
Que vaut x sachant que $x \in]0;0,25[$ représente le nombre de moles par litre de produit formé ?

   Le nombre de moles par litre de produit formé vaut $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ donc approximativement 0,146 mol/L.

3. **En creusant pour les fondations d'une maison, on pénètre dans une masse de débris de roche emballés dans une matrice argileuse. Dans la masse, on trouve les restes d'un arbuste qu'on échantillonne pour le dater au carbone-14. On obtient un carbone-14 résiduel correspondant à $17\ \%$ de la quantité initiale.**
Sachant que la constante de désintégration radioactive λ du carbone-14 vaut $1,21\ 10^{-4}$ (en année^{-1}) et que $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ où $N(t)$ est le nombre d'atomes restants au temps t (en années) et N_0 le nombre d'atomes au départ, déterminer
a) la demi-vie (temps nécessaire pour que le nombre d'atomes radioactifs soit diminué de moitié) du carbone-14
b) l'âge de cet arbuste.

   a) La demi-vie du carbone-14 est de 5 728 années.
   b) L'arbuste a 14 644 ans.

4. **Le mouvement d'un point matériel sur un pendule rotatif est décrit par la fonction potentielle**
$$\nu(\theta) = -\frac{n^2}{2}\sin^2(\theta) - \cos(\theta),\ \ \theta \in [-\pi, \pi]$$
où n est un paramètre réel strictement positif. Les positions d'équilibre du système correspondent aux extrema de ν (équilibre stable pour un minimum, instable pour un maximum).
Déterminer les positions (éventuelles) d'équilibre du système.

   Les extrema éventuels sont compris dans l'ensemble des zéros de la dérivée première de ν.
   Si $n \in]0,1]$ les zéros sont $-\pi,\ 0$ et π.
   Si $n > 1$, les zéros sont $-\pi,\ 0,\ \pi$ et $\pm\arccos(\frac{1}{n^2})$.

Pour avoir un extremum, la dérivée doit changer de signe de part et d'autre du zéro. Dès lors,
- si $n \in]0,1]$, on a un maximum en $-\pi$ et π et un minimum en 0
- si $n > 1$, on a un maximum en $-\pi,\ 0$ et π et un minimum en $\pm\text{arcos}(\frac{1}{n^2})$.

5. (Pour les physiciens) [1] **Par une intégration par parties**
   a) donner une formule de récurrence pour $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(x))^n \, dx \ \ (n \in \mathbb{N})$
   b) En déduire la valeur de I_n**.**

   On a $I_n = -n\, I_{n-1},\ n \geq 1$ et $I_n = (-1)^n\, n!$

1. Et ceux qui veulent relever le défi

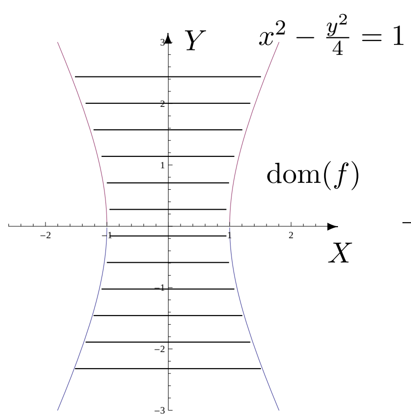
Liste 4 : fonctions de plusieurs variables (1)

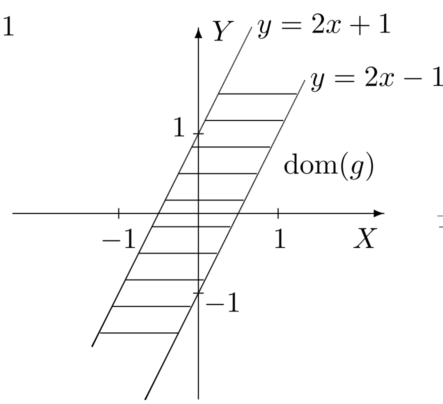
I. Définitions et représentations graphiques

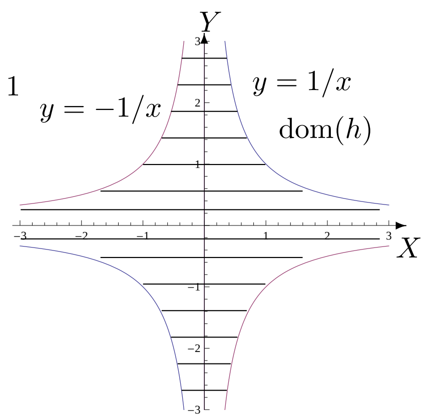
1. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.**

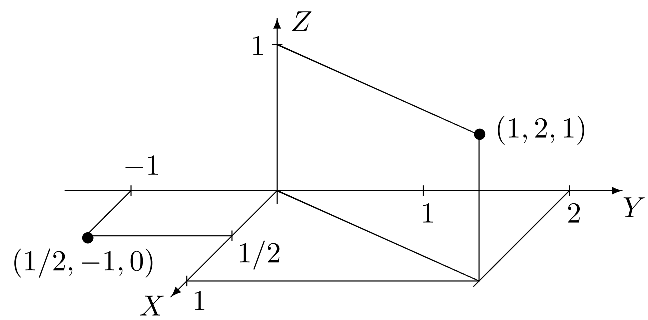
$$f(x,y) = \ln\left(\frac{y^2}{4} - x^2 + 1\right), \quad g(x,y) = \sqrt{1 - |2x-y|}, \quad h(x,y) = \operatorname{arcos}(xy).$$

S'il appartient au domaine de définition, donner l'image de $(1/2, -1)$ **par** f**, de** $(1,2)$ **par** g **et de** $(2,1)$ **par** h**. Dans un repère orthonormé de l'espace, représenter ces points et leur image éventuelle.**
Les domaines de définition sont les suivants :
• $\text{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{4} - x^2 + 1 > 0\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points de l'hyperbole étant exclus de l'ensemble. Comme $(1/2, -1)$ appartient à $\text{dom}(f)$, on a $f(1/2, -1) = 0$.
• $\text{dom}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq 2x - y \leq 1\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des droites sont compris dans l'ensemble. Comme $(1,2)$ appartient à $\text{dom}(g)$, on a $g(1,2) = 1$.
• $\text{dom}(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xy \leq 1\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des hyperboles sont compris dans l'ensemble. Comme $(2,1)$ n'appartient pas à $\text{dom}(h)$, h n'est pas défini en ce point.



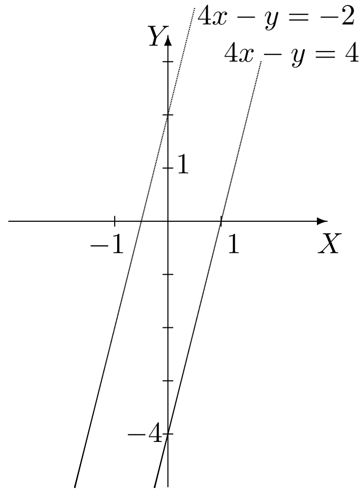


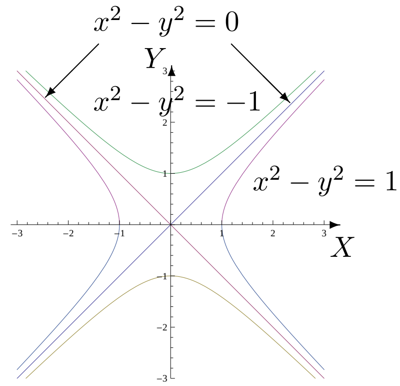


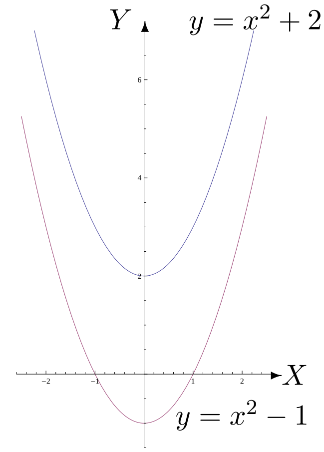


2. **Dans chacun des cas suivants, représenter les courbes de niveau d'équation** $f(x,y) = c$ **si**
a) $f(x,y) = 4x - y$ et $c = -2,\ 4$
b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ et $c = -1,\ 0,\ 1$

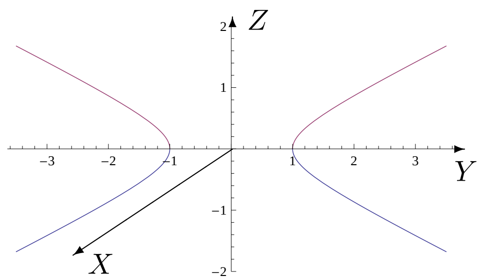
c) $f(x,y) = x^2 - y$ et $c = -2,\ 1$





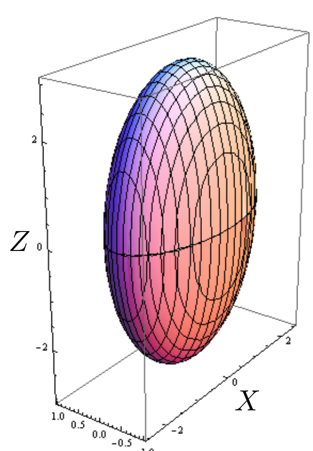


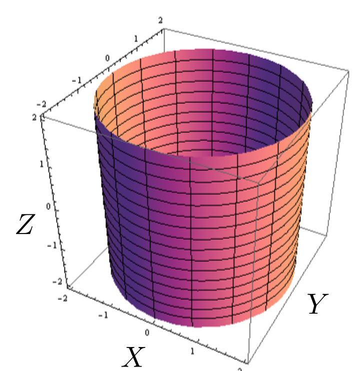
3. **On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les trois axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$ dans le plan d'équation $z = 0$ puis dans celui d'équation $x = 0$. Comment appelle-t-on chacune de ces courbes ? Quelle est la nature de cette quadrique ?**
   La trace dans le plan d'équation $z = 0$ est le cercle centré à l'origine du repère et de rayon 1 ; celle dans le plan d'équation $x = 0$ est une hyperbole d'équation cartésienne $y^2 - 4z^2 = 1$ (cf. graphique). Cette quadrique est un hyperboloïde à une nappe.



4. **Esquisser les représentations graphiques des surfaces quadriques dont les équations cartésiennes sont**

$$a)\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \qquad\qquad b)x^2 + y^2 = 4.$$





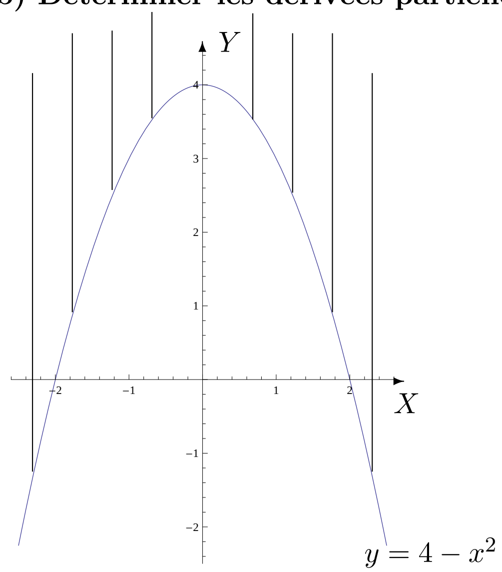
II. Dérivation et gradient

1. **En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction f donnée explicitement par $f(x,y) = 3x^2 + xy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.**
La fonction f est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et sa dérivée partielle en ce point vaut -4.

2. **On donne les fonctions f, g et h par**

$$f(x,y) = \ln(x^2 - 4 + y), \quad g(x,y) = \cos(x^2y^2 + 4y) \quad \textbf{et} \quad h(x,y) = x^2\, e^{-\frac{x}{y}}.$$

a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.



Pour la fonction f, les 2 domaines sont égaux à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y - 4 > 0\}$.
La représentation graphique de cet ensemble est la région hachurée, les points de la parabole étant exclus de l'ensemble.
Les dérivées partielles sont données par

$$D_x f(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y - 4}$$

et

$$D_y f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y - 4}.$$

Pour la fonction g, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2$: ce sont tous les points du plan.
Les dérivées partielles sont données par

$$D_x g(x,y) = -2xy^2 \sin(x^2y^2 + 4y) \qquad \text{et} \qquad D_y g(x,y) = -(2x^2y + 4)\sin(x^2y^2 + 4y).$$

Pour la fonction h, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0$: ce sont tous les points du plan sauf ceux de l'axe des abscisses. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x h(x,y) = \left(2x - \frac{x^2}{y}\right) e^{-\frac{x}{y}} \qquad \text{et} \qquad D_y h(x,y) = \frac{x^3}{y^2}\, e^{-\frac{x}{y}}.$$

3. **On donne la fonction f par $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 + 4y^2})$.**
a) Déterminer son domaine de définition et d'infinie dérivabilité.
b) Dans le domaine d'infinie dérivabilité, calculer $D_x^2 f + D_y^2 f$.

Les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on a $D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y) = \dfrac{3(x^2 - 4y^2)}{(x^2 + 4y^2)^2}$.

4. **a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2\, x_2 \sin(3x_3)$.**
b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x, y, z) = x^2 e^{xy^2\sqrt{z}}$.
a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^3$ et son gradient est le vecteur de composantes

$$(2x_1x_2 \sin(3x_3),\ x_1^2 \sin(3x_3),\ 3x_1^2 x_2 \cos(3x_3)).$$

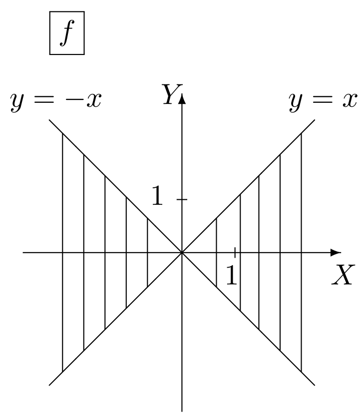
b) La fonction g est dérivable sur $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ et son gradient est le vecteur de composantes

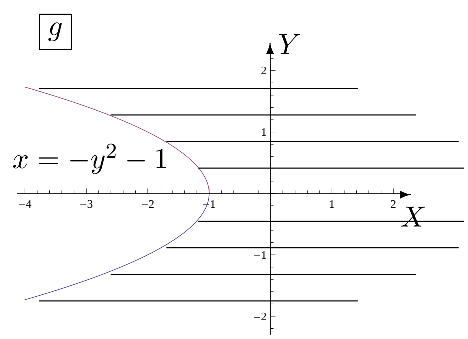
$$\left((2x + x^2y^2\sqrt{z})e^{xy^2\sqrt{z}},\ 2x^3y\sqrt{z}\, e^{xy^2\sqrt{z}},\ \frac{x^3y^2}{2\sqrt{z}}\, e^{xy^2\sqrt{z}}\right).$$

5. **On donne les fonctions f et g respectivement par**

$$f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) \qquad g(x, y) = \exp(\sqrt{x + y^2 + 1}).$$

a) Déterminer le domaine de définition A et d'infinie dérivabilité B de ces fonctions. Représenter ces domaines.
b) Déterminer l'expression explicite de $|x|D_xf(x, y) + |y|D_yf(x, y)$.
c) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f\left(\frac{1}{t}, t\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
d) Déterminer l'expression explicite de $G(t) = g(\sin^2(t), \cos(t))$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
a) Pour f, on a $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{y}{x} \leq 1,\ x \neq 0\}$ et
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \frac{y}{x} < 1,\ x \neq 0\}$.
Pour g, on a $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 + 1 \geq 0\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 + 1 > 0\}$.
Voici les représentations graphiques de ces ensembles (parties hachurées) :





Les points des droites sont compris dans A, sauf l'origine du repère.
Les points des droites sont exclus de B.

Les points de la parabole sont compris dans l'ensemble A mais non dans B.

b) On a

$$|x|D_xf(x, y) + |y|D_yf(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad xy \geq 0 \\ \dfrac{-2y}{\sqrt{x^2 - y^2}} & \text{si} \quad xy < 0 \end{cases}$$

c) L'expression explicite de $F(t) = f\left(\frac{1}{t}, t\right)$ est donnée par $F(t) = \arcsin(t^2)$; si on considère F sans faire référence à la composition, son domaine de dérivabilité est $]-1,1[$ mais si on tient compte de la composition alors on doit retirer 0 du domaine de dérivabilité. La dérivée de F est

$$DF(t) = \frac{2t}{\sqrt{1-t^4}}.$$

d) L'expression explicite de $G(t) = g(\sin^2(t), \cos(t))$ est donnée par $G(t) = \exp(\sqrt{2})$; son domaine de dérivabilité est $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $DG(t) = 0$.

6. **On donne la fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.**
   a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
   b) Si on définit F par $F(x,y) = f(x,y)(D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y)),\ (x,y) \in B$, montrer que F est une fonction constante et déterminer cette constante.

   On a $A = \mathbb{R}^2$ et $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et F est la fonction constante 1.

7. **On considère la fonction $f_r(x,y) = x^r e^{-\frac{y}{x}},\ r$ étant un réel.**
   a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
   b) Déterminer le réel r tel que $D_x f_r(x,y) = y D_y^2 f_r(x,y) + D_y f_r(x,y),\ (x,y) \in B$.

   On a $A = B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ et le réel r vérifiant l'égalité donnée vaut -1.

8. **On donne la fonction $f(x,y) = \sin(ax)\cos(by)$ où a et b sont des constantes réelles non nulles. Montrer que f vérifie l'équation des ondes $D_x^2 f - \dfrac{a^2}{b^2} D_y^2 f = 0$.**

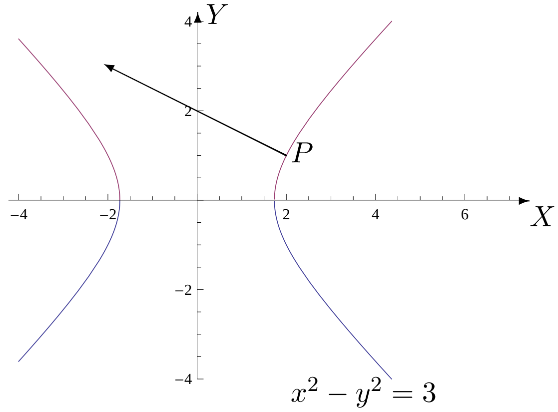
   La fonction f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie bien l'équation des ondes.

9. **L'expérience montre que, dans un champ de température, la chaleur s'écoule dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite. Trouver cette direction et ce sens en tout point du champ puis en un point P donné dans les cas suivants :**
   a) $T(x,y) = x^2 - y^2$ et P a pour coordonnées $(2,1)$
   b) $T(x,y) = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ et P a pour coordonnées $(2,2)$
   Esquisser l'isotherme correspondant à la valeur 3 dans le premier cas et à $\frac{\pi}{4}$ dans le second ainsi que les vecteurs qui correspondent à la direction et au sens obtenus au point P.

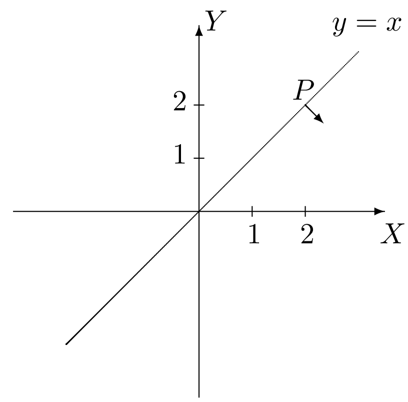
   En toute généralité, le gradient de T est un vecteur qui pointe dans la direction et le sens dans lesquels T croît le plus vite. Puisque la chaleur s'écoule dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite, on considère l'opposé du vecteur gradient de T c'est-à-dire le vecteur de composantes

   $$\text{a) } (-2x, 2y) \qquad\qquad \text{b) } \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right).$$

   Au point P, on a respectivement les vecteurs de composantes $(-4,2)$ et $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.



Y
X
P
$x^2 - y^2 = 3$

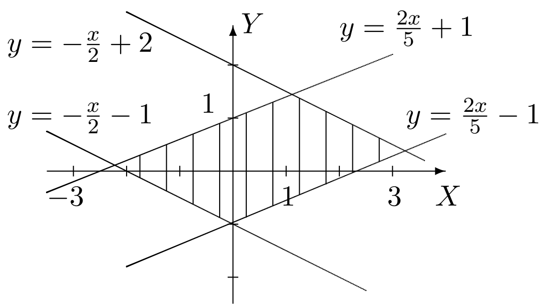


Y
$y = x$
P
X

Liste 5 : fonctions de plusieurs variables (2)

I. Dérivation des fonctions composées

1. **a) On donne f, continûment dérivable sur $]-2,4[\times]-5,5[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y)=f(x+2y,2x-5y)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.**



Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2<x+2y<4,\ -5<2x-5y<5\}$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des droites étant exclus de l'ensemble.

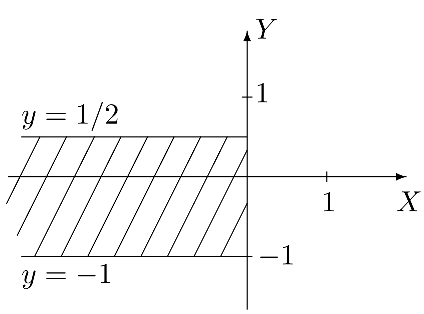
Les dérivées partielles sont

$$(D_xF)(x,y)=(D_uf)(x+2y,2x-5y).1+(D_vf)(x+2y,2x-5y).2$$

$$(D_yF)(x,y)=(D_uf)(x+2y,2x-5y).2+(D_vf)(x+2y,2x-5y).(-5)$$

où u et v sont respectivement les première et deuxième variables de f.

b) Même question pour g, continûment dérivable sur $]0,1[\times]\ln\frac{\pi}{3},+\infty[$ et $G(x,y)=$ $g(\exp(x),\ \ln(\arccos(y)))$.



Le domaine de dérivabilité de G est l'ensemble $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0,\ y\in]-1,1/2[\}$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des bords étant exclus de l'ensemble.

Les dérivées partielles sont

$$(D_xG)(x,y)=(D_ug)(\exp(x),\ln(\arccos(y))).\exp(x)$$

$$(D_yG)(x,y)=(D_vg)(\exp(x),\ln(\arccos(y))).\left(\frac{-1}{\arccos(y)\sqrt{1-y^2}}\right)$$

où u et v sont respectivement les première et deuxième variables de g.

2. **On donne la fonction g continûment dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}[\times]0,+\infty[\times]0,\frac{10}{9}[$.**
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f:t\mapsto f(t)=g(\arcsin(2t),\frac{1}{\sqrt{t+1}},t^2+1)$.
   b) Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.

c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en 0 ? $1/3$?
d) Mêmes questions si g est continûment dérivable sur $]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}[\times]\sqrt{2},+\infty[\times]0,3[$.
a) Le domaine de dérivabilité de f est $A =]-\frac{1}{3},\frac{1}{4}[$.
b) La dérivée de f est donnée par

$$Df(t) = (D_u g)\left(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right).\frac{2}{\sqrt{1-4t^2}} + (D_v g)\left(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right).\frac{-1}{2\sqrt{(t+1)^3}}$$

$$+(D_w g)\left(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right).2t$$

où u, v et w sont respectivement les première, deuxième et troisième variables de g.
c) La dérivée de f en 0 est donnée par $(Df)(0) = (D_u g)(0,1,1).2 + (D_v g)(0,1,1).(\frac{-1}{2})$; elle n'est pas dérivable en 1/3.
d) Le domaine de dérivabilité de f est vide : f n'est jamais dérivable.

3. **Soit** $F(t) = f(x(t), y(t))$ **avec** $x(3) = 2,\ y(3) = 7,\ (Dx)(3) = 5,\ (Dy)(3) = -4,\ (D_x f)(2,7) = 6$ **et** $(D_y f)(2,7) = -8$**. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en** 3**, que vaut** $(DF)(3)$ **?**

   On a $(DF)(3) = (D_x f)(2,7).(D_t x)(3) + (D_y f)(2,7).(D_t y)(3) = 62$.

4. **Soit** $F(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$**. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en** $(1,0)$ **si**

$$u(1,0) = 2 \quad (D_s u)(1,0) = -2 \quad (D_t u)(1,0) = 6$$

$$v(1,0) = 3 \quad (D_s v)(1,0) = 5 \quad (D_t v)(1,0) = 4$$

   et $(D_u f)(2,3) = -1$ **et** $(D_v f)(2,3) = 10$**, calculer** $(D_s F)(1,0)$ **et** $(D_t F)(1,0)$**.**

   On a $(D_s F)(1,0) = (D_u f)(2,3).(D_s u)(1,0) + (D_v f)(2,3).(D_s v)(1,0) = 52$ et $(D_t F)(1,0) = (D_u f)(2,3).(D_t u)(1,0) + (D_v f)(2,3).(D_t v)(1,0) = 34$

5. **On donne la fonction** $(x,y) \mapsto f(x,y)$ **définie et 2 fois continûment dérivable sur** $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$**. On effectue le changement de variables en coordonnées polaires** $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$ $(r > 0$ **et** $\theta \in [0, 2\pi[)$ **et on considère** $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$**.**
   Montrer que $\qquad (D_x f)^2 + (D_y f)^2 = (D_r F)^2 + \dfrac{1}{r^2}(D_\theta F)^2$

   Remarque : le premier membre est pris au point de coordonnées $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et le second en (r,θ).

II. Permutation de l'ordre d'intégration

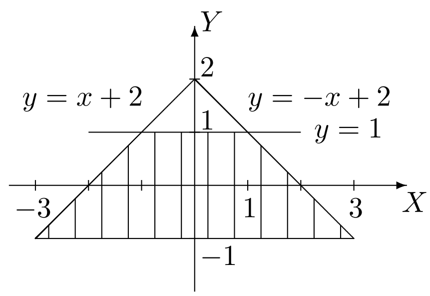
1. **Supposons que la fonction f est intégrable sur l'ensemble considéré. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants**

$$a) \int_{-1}^{1}\left(\int_{y-2}^{2-y} f(x,y)\ dx\right)\ dy \qquad\qquad b) \int_{0}^{3}\left(\int_{y}^{\sqrt{18-y^2}} f(x,y)\ dx\right)\ dy.$$

a) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

$$\int_{-3}^{-1}\left(\int_{-1}^{x+2} f(x,y)\ dy\right) dx + \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\ dy\right) dx + \int_{1}^{3}\left(\int_{-1}^{-x+2} f(x,y)\ dy\right) dx$$

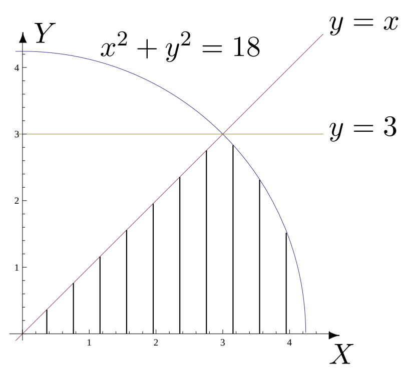
et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



b) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

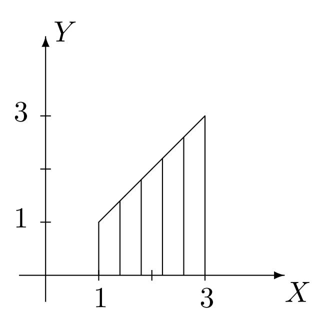
$$\int_{0}^{3}\left(\int_{0}^{x} f(x,y)\ dy\right) dx + \int_{3}^{3\sqrt{2}}\left(\int_{0}^{\sqrt{18-x^2}} f(x,y)\ dy\right) dx$$

et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



2. **On considère une fonction f intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné A ci-dessous. Ecrire, dans un ordre et dans l'autre, l'intégrale**

$$\int\int_A f(x,y)dx\,dy.$$

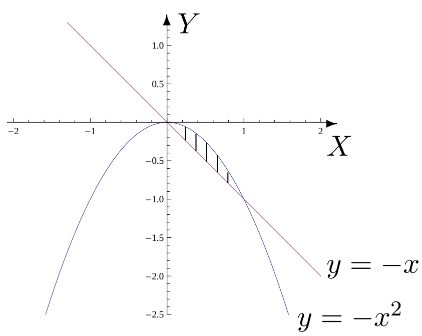


L'intégrale sur cet ensemble s'écrit

$$\int_1^3 \left(\int_0^x f(x,y)\ dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_1^3 f(x,y)\ dx \right) dy + \int_1^3 \left(\int_y^3 f(x,y)\ dx \right) dy.$$

III. Intégration sur des ensembles fermés bornés

1. **Dans le plan, on considère l'ensemble borné fermé A délimité par le graphique de la droite d'équation cartésienne $x + y = 0$ et celui de la fonction $x \mapsto -x^2$.**
   a) Représenter A dans un repère orthonormé et en donner une expression analytique.
   b) Calculer, si elle existe, l'intégrale de f sur A si $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x\cos(y)$.



L'expression analytique de A est$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \in [-x, -x^2]\}$ ou encore $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,0],\ x \in [-y, \sqrt{-y}]\}$.
La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\sin 1 - \frac{1}{2}(\cos 1 + 1)$.

2. **Si elle existe, calculer l'intégrale de**
   a) $f(x,y) = 4 + x^2$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,2],\ y \in [1+x^2, 9-x^2]\}$
   b) $f(x,y) = \cos(y^2)$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0],\ y \in [-x,1]\}$
   c) $f(x,y) = y^2\cos(xy)$ sur $A = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \times [-1,1]\}$

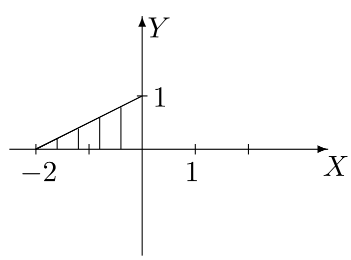
   a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{512}{5}$.

   b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}\sin 1$.

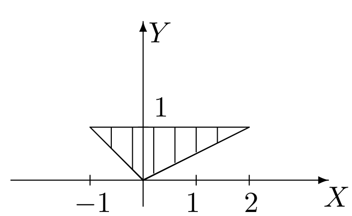
   c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{2\pi - 8}{\pi^2}$.

3. **Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble A borné fermé hachuré ci-dessous dans les cas suivants**

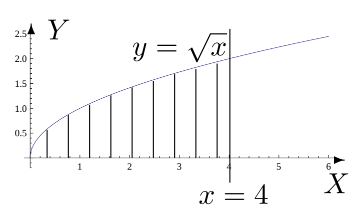
a) $\int\int_A e^{x-y}\ dx\,dy$



b) $\int\int_A xy\ dx\,dy$



c) $\displaystyle\int\int_A \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\ dx\,dy$

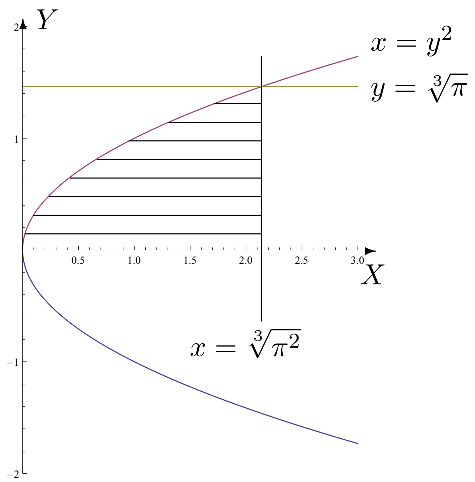


a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\left(\frac{1}{e} - 1\right)^2$.

b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\frac{3}{8}$.

c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1)$.

4. **Soit** $I = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \cos(\sqrt{x^3})\ dx \right)\ dy$**.**
Représenter l'ensemble d'intégration et calculer l'intégrale si c'est possible.



La fonction est intégrable sur cet ensemble (partie hachurée) et son intégrale vaut 0.

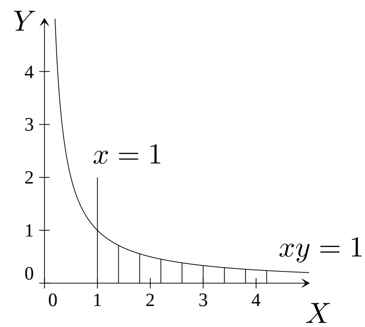
Liste 6 : fonctions de plusieurs variables (3)

Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. **Si elles ont un sens, calculer les intégrales suivantes et représenter l'ensemble d'intégration.**

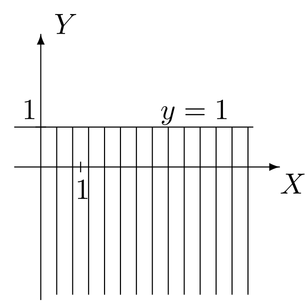
a) $\displaystyle\int\int_A \frac{1}{x}\,dx\,dy \quad$ avec $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



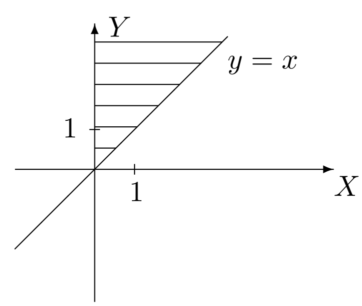
b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1}\left(\int_0^{+\infty} e^{y-3x}\,dx\right)dy$

La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[,\ y \in]-\infty,1]\}$ et son intégrale vaut $\dfrac{e}{3}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



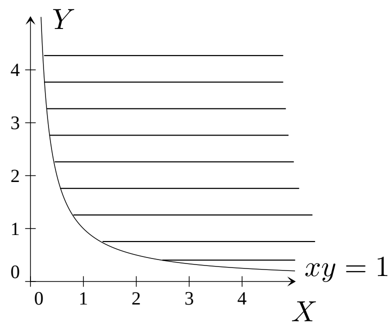
c) $\displaystyle\int\int_A e^{-y^2}\,dx\,dy \quad$ avec $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



d) $\displaystyle\int\int_A x^3\,e^{-x^2 y}\,dx\,dy \quad$ avec $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 1 \leq xy\}$

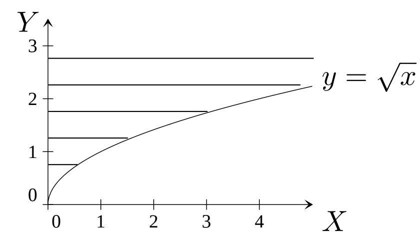
La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



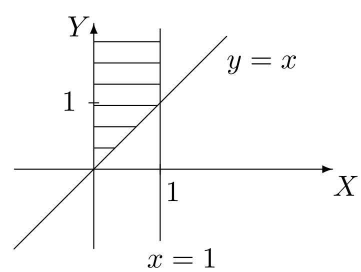
2. **Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.**

$$a) \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{y^2} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\,dx\right)dy, \quad b) \int_0^1\left(\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}\,dy\right)dx, \quad c) \int_0^1\left(\int_0^{x^2} \frac{1}{x+y}\,dy\right)dx$$

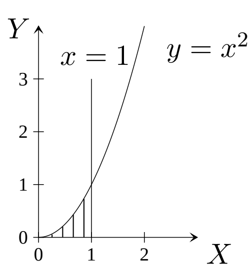
a) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]0,+\infty[, \ x \in [0,y^2]\}$ et son intégrale vaut $\frac{1}{2}\ln 2$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



b) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,1], \ y \in [x,+\infty[\}$ et son intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



c) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,1], \ y \in [0,x^2]\}$ et son intégrale vaut $2\ln 2 - 1$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



3. **On considère l'intégrale double suivante**

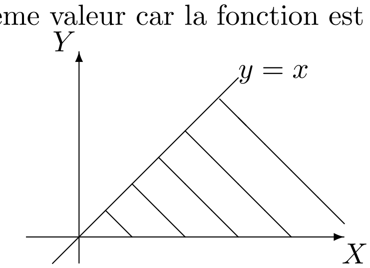
$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x \cos(y-x) e^{-x} \, dy \right) dx$$

a) Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
b) Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales dans un ordre et dans l'autre.
c) Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Pouvait-on le prévoir sans calculer les 2 intégrales ?

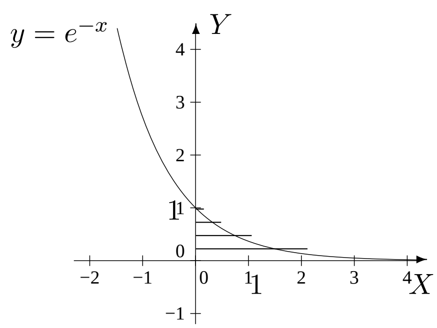
a) L'ensemble d'intégration A est donné par

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[, \ y \in [0,x]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[, \ x \in [y,+\infty[\}$$

et est représenté par l'ensemble hachuré ci-dessous.
En permutant l'ordre d'intégration, on a $I' = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_y^{+\infty} \cos(y-x) e^{-x} \, dx \right) dy$.
b) La fonction est intégrable sur A et, dans un ordre ou dans l'autre, son intégrale vaut $1/2$.
c) On trouve la même valeur car la fonction est intégrable sur A.



4. **Calculer l'intégrale de $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x - y$ sur l'ensemble fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)**



Une description analytique de l'ensemble d'intégration est donnée par

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[, \ y \in [0,e^{-x}]\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]0,1], \ x \in [0,-\ln(y)]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, \ x \geq 0\}$$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{3}{4}$.

Liste 7 : fonctions de plusieurs variables (4)

I. Volume d'un corps

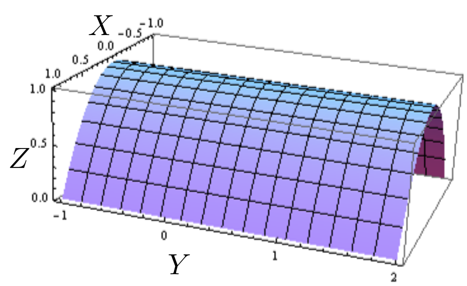
Calculer le volume des corps de l'espace décrits ci-dessous. Donner aussi une représentation graphique de ces corps.

1. **Corps borné par la surface d'équation cartésienne** $z = 1 - x^2$ **et les plans d'équation** $z = 0,\ y = -1$ **et** $y = 2$**.**
2. **Corps borné par les plans de coordonnées et la surface d'équation** $2x + 3y + z = 6$
3. (*) [2]**Corps borné par la surface d'équation cartésienne** $z = 1 - 4x^2 - y^2$ **et le plan d'équation** $z = 0$**.**

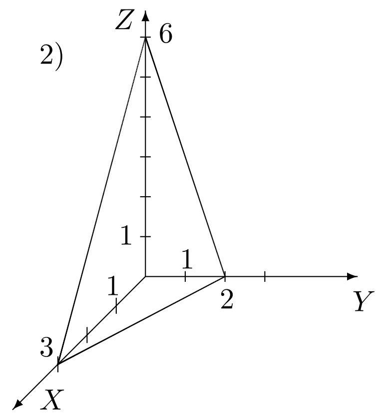
   Le volume du premier corps vaut 4 (unités de volume), celui du deuxième vaut 6 et celui du troisième vaut $\dfrac{\pi}{4}$.

   Les représentations graphiques sont les suivantes :

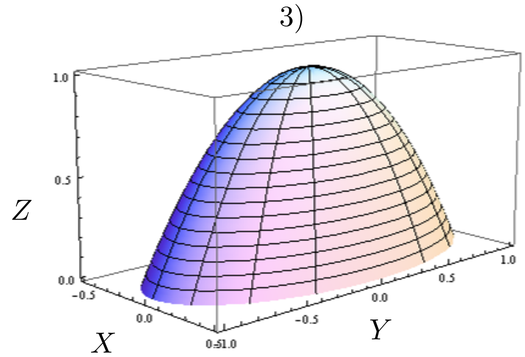
1)



2)



3)



II. Intégration par changement de variables polaires

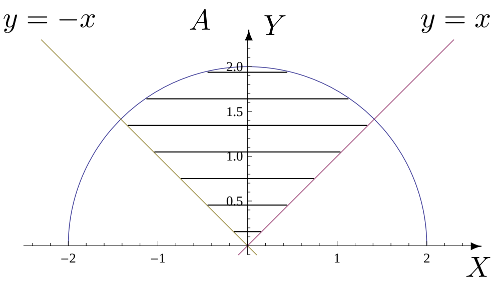
1. **Si elle existe, calculer**

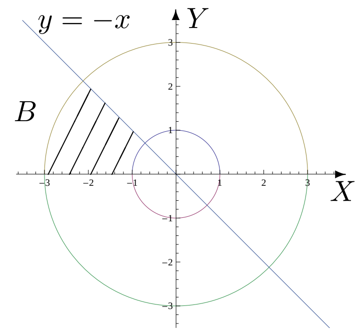
   a) $\displaystyle\int\int_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.

   b) $\displaystyle\int\int_B xy\,dx\,dy$ où B est l'ensemble hachuré ci-dessous.

2. Pour les physiciens ... et ceux qui veulent !

c) $\displaystyle\int\int_C (2x+y)\; dx\, dy \quad$ où $\quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{-x, \sqrt{1-x^2}\}\}.$





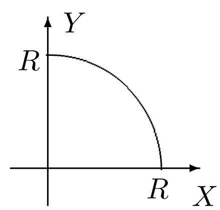
Les 3 fonctions sont intégrables et les intégrales valent respectivement $\dfrac{4\pi}{3}$, -5 et $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

2. **Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où**

$$x_A = s^{-1} \int\int_A x\; dx\; dy, \quad y_A = s^{-1} \int\int_A y\; dx\; dy$$

et où s est l'aire de la surface A.
Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un tiers de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

La position du centre de masse est donnée par le point de coordonnées $\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2\pi}, \dfrac{3R}{2\pi}\right)$ dans un repère orthonormé correspondant au graphique ci-dessous.



3. **Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 9 - x^2 - y^2$ et par le plan d'équation $z = 0$.**

Le volume du corps est $\dfrac{81\pi}{2}$ (unités de volume).

IV. Divers

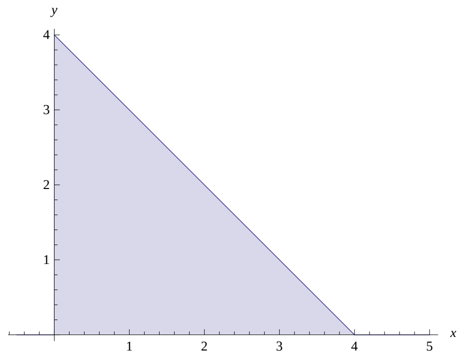
La masse d'une plaque plane est donnée par

$$m = \int\int_R \delta(x,y) dx dy,$$

où $\delta(x,y)$ est la densité au point de coordonnées (x,y). Considérons une plaque plane de la forme d'un triangle isocèle rectangle R dont les côtés égaux mesurent $4\ m$. Si la densité en un point P est directement proportionnelle au carré de la distance de P au sommet opposé à l'hypoténuse[3], si l'on place l'origine du repère sur ce sommet et si les axes OX et OY sont les prolongations des côtés de même longueur du triangle R,

a) **quelle est la masse de cette plaque ?**

b) **en quelles unités s'exprime la constante K ?**



La masse de la plaque est $\frac{128K}{3}$ kg et la constante K s'exprime en kg/m^4.

3. c'est-à-dire $\delta(x,y) = K(x^2+y^2)$ (où K est une constante)

Liste 8 : approximations polynomiales

Approximations polynomiales

1. **Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations.**

   $f_1(x) = \cos(x)\, e^{3x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3$ $\qquad$ $f_2(x) = \sqrt{1+9x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2$

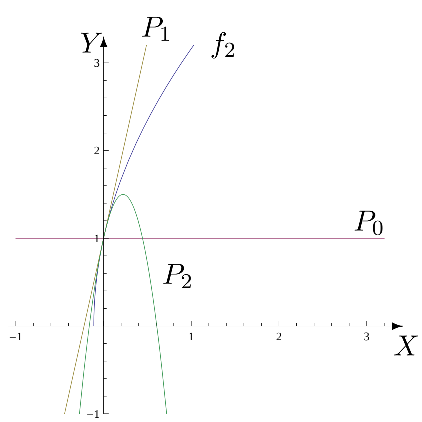
   $f_3(x) = \dfrac{1}{1-2x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2$ $\qquad$ $f_4(x) = \operatorname{arctg}(x),\ x_0 = 0$ (resp. $x_0 = 1), n = 0,1,2$

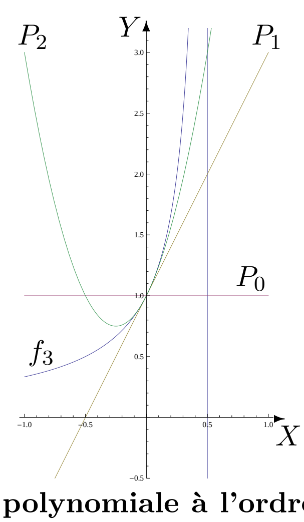
   $f_5(x) = \cos^2(x),\ x_0 = 0,\ n = 0,1,2$ $\qquad$ $f_6(x) = \sin(x),\ x_0 = 1, n = 0,1,2$

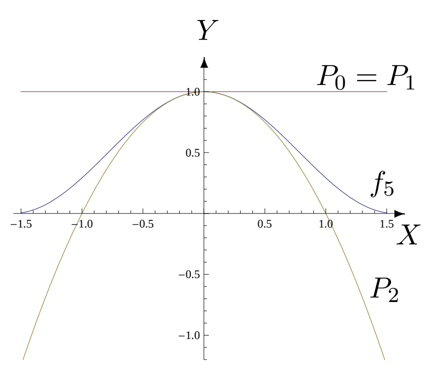
Fonction	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2
f_1	1	$1+3x$	$1+3x+4x^2,\ x\in\mathbb{R}$
f_2	1	$1+\dfrac{9x}{2}$	$1+\dfrac{9x}{2}-\dfrac{81x^2}{8},\ x\in\mathbb{R}$
f_3	1	$1+2x$	$1+2x+4x^2,\ x\in\mathbb{R}$
$f_4(x_0=0)$	0	x	$x,\ x\in\mathbb{R}$
$f_4(x_0=1)$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-1}{2}$	$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{(x-1)^2}{4},\ x\in\mathbb{R}$
f_5	1	1	$1-x^2,\ x\in\mathbb{R}$
f_6	$\sin(1)$	$\sin(1)+\cos(1)(x-1)$	$\sin(1)+\cos(1)(x-1)-\sin(1)\dfrac{(x-1)^2}{2},\ x\in\mathbb{R}$

   L'approximation à l'ordre 3 en 0 de f_1 est donnée par $P(x) = 1+3x+4x^2+3x^3,\ x\in\mathbb{R}$.

   Dans les graphiques suivants, notons P_i l'approximation polynomiale à l'ordre i.

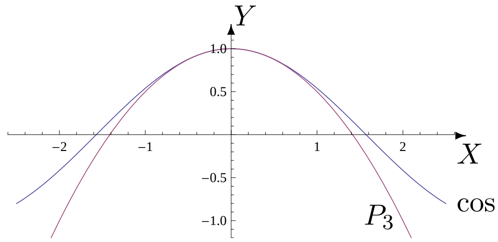






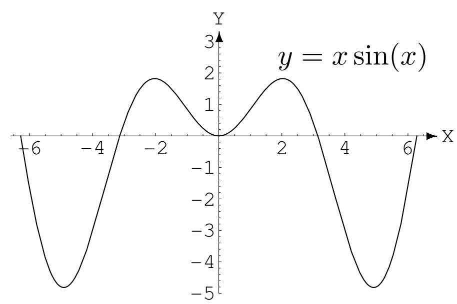
2. a) **Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction** cos **et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.**

L'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 est donnée par $P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2},\ x \in \mathbb{R}$ et le reste vaut $R_3(x) = \dfrac{\cos(u)}{4!}x^4,\ x \in \mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x. Dès lors, on a $|R_3(x)| \leq \dfrac{x^4}{24}$.

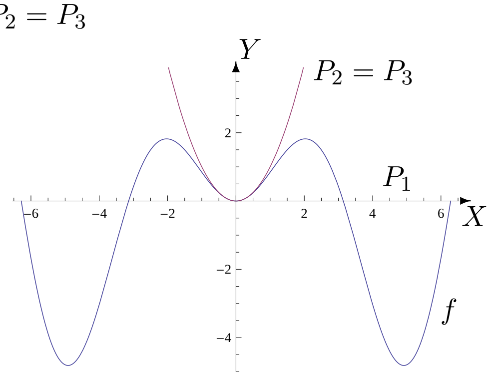


b) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 à l'ordre $1,\ 2$ et 3 de la fonction $f(x) = x\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$. Représenter graphiquement ces approximations dans le même repère orthonormé que celui où f est représenté (cf ci-dessous), en justifiant les positions relatives des courbes.

(Suggestion : $|\sin x| \leq |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$)



Les approximations polynomiales en 0 à l'ordre $1,\ 2$ et 3 de la fonction f sont respectivement $P_1(x) = 0,\ P_2(x) = x^2 = P_3(x),\ x \in \mathbb{R}$.
Au voisinage de zéro, le graphique de f est
1) au-dessus de celui de P_1
2) en dessous de celui de $P_2 = P_3$



3. **Un professeur de mathématique lance un défi à ses élèves. Le premier qui donnera une approximation du nombre e avec les 3 premières décimales exactes et pourra expliquer sa méthode aux autres sera dispensé de la prochaine interrogation. Pour relever le défi, les élèves, restés en classe, n'ont droit qu'à une feuille et un crayon. Ils sont sans accès à internet et ne peuvent utiliser ni gsm, ni calculatrice ...**

   Comment peuvent-ils procéder ?

L'approximation polynomiale en 0 à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) de l'exponentielle est donnée par

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}$$

et le reste associé vaut $R_n(x) = \dfrac{e^u}{(n+1)!}\, x^{n+1},\ x \in \mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x. Dès lors, si $x \in [0,1]$, $e^u \in [1,e] \subset [1,3]$ et on a $\quad R_n(x) \leq \dfrac{3\,x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Si $x = 1$, l'inégalité

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{10^3} \quad \text{est vérifiée si} \quad n \geq 6\ (7! = 5040).$$

Dès lors, en prenant $n = 6$ et $x = 1$, une valeur approchée de e est donnée par

$$P(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2 + \frac{517}{720} = 2,718\ldots$$

4. **Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 des fonctions données par**[4]

$$g_1(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right), \quad g_2(x) = \frac{-x+2}{2x^2+x-1}.$$

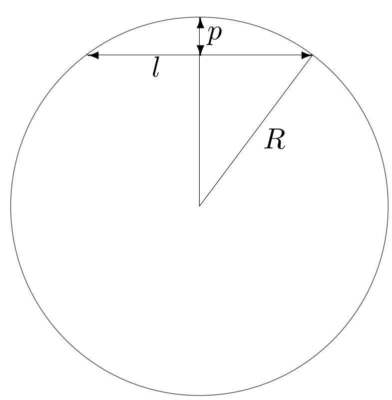
Pour g_1, les approximations polynomiales à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 sont respectivement

$$P_0(x) = 0,\ P_1(x) = -2x,\ P_2(x) = -2x,\ P_3(x) = -2x - \frac{2x^3}{3},\ x \in \mathbb{R}.$$

Pour g_2, les approximations polynomiales à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 sont respectivement

$$P_0(x) = -2,\ P_1(x) = -2 - x,\ P_2(x) = -2 - x - 5x^2,\ P_3(x) = -2 - x - 5x^2 - 7x^3,\ x \in \mathbb{R}.$$

5. **Un tunnel d'une longueur l relie deux points de la surface de la Terre. Si R désigne le rayon de la Terre, déterminer une approximation de la profondeur maximale p de ce tunnel.**



Une approximation de la profondeur maximale de ce tunnel vaut $\dfrac{l^2}{8R}$.

4. *Suggestion.* Utiliser le développement de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$; décomposer en fractions simples

Liste 9 : Suites

Suites

1. **Etudier la convergence des suites suivantes et préciser leur limite en cas de convergence** :

a) $x_m = \dfrac{2m^2+5m+1}{3m^2+2}$ $(m \in \mathbb{N})$

b) $x_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

c) $x_n = n - \sqrt{n^3-n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$

d) $x_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$

e) $x_n = \ln(2n^2-n) - \ln(3n+1)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

f) $x_k = \sqrt[k]{k^2}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$

g) $x_n = \dfrac{n \sin(n!)}{n^2+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

h) $x_j = \frac{j!}{j^j}$ $(j \in \mathbb{N}_0)$

i) $x_j = \dfrac{(j!)^2}{(2j)!}$ $(j \in \mathbb{N})$

j) [5] $x_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

a) La suite converge vers $\frac{2}{3}$
b) La suite converge vers 1
c) La suite converge vers $-\infty$
d) La suite converge vers $\frac{2}{5}$
e) La suite converge vers $+\infty$
f) La suite converge vers 1
g) La suite converge vers 0
h) La suite converge vers 0
i) La suite converge vers 0
j) La suite converge vers $\frac{1}{3}$

2. **Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ définie par**

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

est divergente.

Cette suite est divergente car, par exemple, les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ convergent vers des limites différentes.

3. **Montrer que la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence selon**

$$x_0 = \sqrt{2} \qquad \textbf{et} \qquad x_j = \sqrt{2+x_{j-1}} \quad , \forall j \in \mathbb{N}_0$$

est croissante et majorée. En déduire la convergence et la limite de cette suite.

La suite est croissante et majorée par 2 ; elle converge vers 2.

4. **Soient $a, b \in \mathbb{R}_0$ avec $a \neq 1$ ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par**

$$u_{n+1} = au_n + b, \;\; u_0 \in \mathbb{R}.$$

i) **En supposant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelle est la seule limite L possible de cette suite ?**

5. Suggestion : Montrer par récurrence sur n que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Si $a \neq 1$, la seule limite possible de cette suite est $\dfrac{b}{1-a}$

ii) **Définissons $v_n = u_n - L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et en déduire l'éventuelle convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**

Si $u_0 = L$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L quel que soit a.
Si $u_0 \neq L$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- converge vers une limite finie si $a \in]-1,1[\setminus\{0\}$
- converge vers une limite infinie si $a < -1$ ou si $a > 1$
- diverge si $a = -1$.

iii) Application : **considérons un carré de côté égal à 1. Partageons-le en 9 carrés égaux et colorions le carré central. Ensuite, pour chaque carré non colorié, réitérons le procédé. Notons A_n l'aire coloriée après l'étape n. Quelle est la limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $A_0 = 0$?**

Comme $A_n = \dfrac{8}{9}A_{n-1} + \dfrac{1}{9}$, la limite de cette suite vaut 1.

Liste 10 : Séries (1)

Séries

1. **Etudier la convergence des séries suivantes** :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{j^2+1}{j^3+1}$ d) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j^3+\sqrt{3}}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{\sqrt[3]{k}}$ f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n\ln(n)}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

a) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente.
b) Série géométrique convergente car $-\frac{1}{2} \in]-1,1[$
c) Série alternée avec la suite $r_j = \dfrac{j^2+1}{j^3+1}$ qui décroît vers 0 donc série convergente.
d) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 3 > 1$ donc série convergente.
e) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.
f) Série alternée avec la suite $r_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ qui décroît vers 0 donc série convergente.
g) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.
h) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.

2. **Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent** :

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^j$ b) $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$ d) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(j+1)(j+2)}$

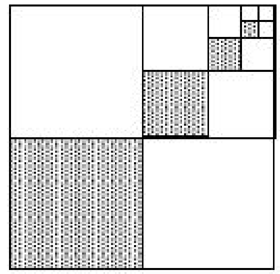
e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+2}}{5^n}$ f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{3k-1}}{k!}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$

a) Série géométrique divergente car $\sqrt{2} \notin]-1,1[$
b) Série géométrique convergente car $-\frac{1}{3} \in]-1,1[$; la somme de la série vaut $\frac{1}{6}$
c) Série définissant l'exponentielle de 3 ; la somme de la série vaut $e^3 - 4$
d) Série convergente dont la somme vaut 1
e) Série géométrique convergente car $\frac{3}{5} \in]-1,1[$; la somme de la série vaut $\frac{45}{2}$
f) Série définissant l'exponentielle de e^3 ; la somme de la série vaut $\frac{1}{e}\exp(e^3)$
g) Série convergente ; la somme de la série vaut $\frac{1}{2}$
h) Série convergente ; la somme de la série vaut $\sin(1)$

3. **Ecrire sous forme d'une série puis d'une fraction irréductible le réel** $1,32222\ldots$.

Le réel $1,3222\ldots = 1,3 + 2.10^{-2} \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} 10^{-j} = \frac{119}{90}$.

4. **Un carré de $4\,cm$ de côté est divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes). Le carré inférieur gauche est ombré. Le carré supérieur droit est à nouveau divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes) et le carré inférieur gauche est ombré. On répète indéfiniment ce processus comme montré sur la figure ci-dessous. Quelle est la surface ombrée totale ?**



La surface ombrée totale vaut $\dfrac{16}{3}$ cm^2.

5. **Une balle est lâchée d'une hauteur de $2\,m$. Chaque fois qu'elle frappe le sol, elle rebondit sur les trois quarts de la distance de sa chute. Quelle distance aura-t-elle parcourue quand elle sera complètement arrêtée ?**

Quand la balle sera complètement arrêtée, elle aura parcouru 14 m.

6. **Démontrer l'égalité**

$$\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta) + \sin^6(\theta) + \ldots = \tan^2(\theta).$$

A quelle(s) condition(s) cette égalité est-elle vraie ?

Cette égalité est vraie si et seulement si $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Liste 11 : Séries (2)

Séries

1. **Etudier la convergence des séries suivantes** :

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j^3 - j + 2}{j^3 + 5j^2 + 10}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^n$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2 + 1}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3 + 1}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{7n + 15}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt[p]{n^3 + 1}}$ $(p \in \mathbb{N}_0)$ g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-ak}$ $(a \in \mathbb{R})$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \ln(3)}$

a) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.
b) Série géométrique convergente car $-\frac{\sqrt{2}}{5} \in]-1, 1[$. On peut aussi la considérer comme une série alternée avec la suite $r_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^n$ qui décroît vers 0 donc série convergente.
c) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ donc série convergente.
d) Série convergente car son terme général pris en valeur absolue peut être comparé à celui d'une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$. On peut aussi la considérer comme une série alternée avec la suite $r_n = \dfrac{n}{n^3 + 1}$ qui décroît vers 0 donc série convergente.
e) Comparaison avec la série harmonique divergente donc série divergente.
f) Si $p = 1$: comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente ; si $p > 1$: comparaison avec une série de Riemann divergente car $\alpha < 1$ donc série divergente. Remarquons que si $p \geq 3$, le terme général ne tend pas vers 0.
g) Si $a > 0$: série géométrique convergente car $e^{-a} \in]-1, 1[$; si $a \leq 0$: série géométrique divergente car $e^{-a} \notin]-1, 1[$
h) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente.

2. **Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent (on donne** $a, b, c \in \mathbb{R}$ **tels que** $0 < ab < c$ **et** $c \neq 0$**)** :

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\ln 2)^{j+3}}{j! \ln(4)}$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + 5k + 6}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n b^{n+1}}{c^{n+2}}$

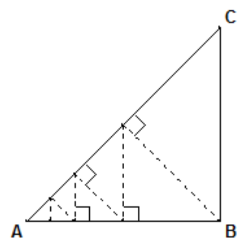
e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{k}{k+3}\right)$

a) Série exponentielle ; la somme de la série vaut $\ln^2(2)$
b) Série géométrique convergente ; la somme de la série vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{\pi - \sqrt{3}}$
c) Série convergente ; la somme de la série vaut $\dfrac{1}{2}$
d) Série géométrique convergente ; la somme de la série vaut $\dfrac{b}{c(c - ab)}$
e) Série convergente ; la somme de la série vaut $\frac{1}{2}$

f) Série convergente ; la somme de la série vaut $-\ln 2$

g) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.

3. **Soit ABC un triangle rectangle isocèle tel que $|BC| = a$ cm ($a > 0$) comme représenté ci-dessous. Une puce qui se trouve en B se déplace le long d'une droite perpendiculaire au segment $[AC]$. Lorsqu'elle atteint ce segment, elle tourne et revient sur le segment $[AB]$ en prenant une route perpendiculaire à $[AB]$. Elle fait ainsi l'aller-retour entre les côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle jusqu'à ce qu'elle atteigne le point A. Quelle sera la distance parcourue par la puce ?**



La distance parcourue par la puce sera $a\ \dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = a(\sqrt{2}+1)$ cm.

Liste 12 : Mathématiques appliquées (1)

Fonctions de plusieurs variables

1. **En thermodynamique, il existe essentiellement 3 types d'équilibres macroscopiques : l'équilibre thermique, l'équilibre mécanique et l'équilibre osmotique (mélange homogène [6]). Dès lors, par définition, un *équilibre thermodynamique* est atteint lorsque ces 3 équilibres sont réunis.**
Selon le premier postulat de la thermodynamique, *l'équilibre thermodynamique d'un système physique se définit à l'aide de 3 paramètres : l'énergie interne U, le volume V et le nombre de particules N du système.*
Le second postulat stipule qu'*il existe une fonction S, dépendant de U, V et N, qui est maximale à l'équilibre thermodynamique.* Cette fonction est appelée *entropie* du système et la connaître, c'est connaître l'ensemble du système. Cette fonction permet de plus de déterminer les *équations d'état* qui régissent le système : ces dernières font intervenir les dérivées partielles de S et sont données par
$$D_U S = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{1}{T} \qquad D_V S = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = \frac{p}{T} \qquad D_N S = \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,U} = \frac{-\mu}{T}$$
où
– T **est la température du système ;**
– p **est la pression du système ;**
– μ **est le potentiel chimique du système (qui renseigne sur l'équilibre osmotique d'un système [7]) ;**
et où les variables indicées sont considérées comme constantes.

Sachant que l'entropie du *gaz de Van Der Waals* (archétype des gaz réels), est donnée par
$$S = k_B N \ln \frac{V - Nv_0}{N} + \frac{3k_B N}{2} \ln\left(\frac{U + \frac{K_i N^2}{V}}{N}\right) + \frac{3k_B N}{2} \ln\left(\frac{4\pi m}{3\hbar^2}\right) + \frac{5}{2} k_B N$$
où
– k_B **est la constante de Boltzmann et vaut approximativement** $1,38.10^{-23} J/K$**,**
– v_0 **est le volume occupé par une particule et dans lequel les autres particules ne peuvent pénétrer,**
– $K_i > 0$ **est le paramètre d'interaction entre les particules,**
– m **est la masse d'une particule,**
– $\hbar$ **est la constante de Planck et vaut** $6,626.10^{-34} J.s$**,**
déterminer les équations d'état d'un tel gaz lorsque le nombre de particules N est constant et, à partir de la première équation d'état, exprimer l'énergie interne U en fonction de V, N et T.

6. Par exemple, si on jette une goutte d'encre dans un verre d'eau, l'encre va “diffuser” dans le liquide et l'équilibre est atteint lorsque l'encre est mélangée de façon homogène avec l'eau.

7. De manière générale, si deux substances de potentiels chimiques respectifs μ_1, μ_2 sont mises en présence l'une de l'autre, l'équilibre thermodynamique est atteint lorsque $\mu_1 = \mu_2$.

Solution. La première équation d'état conduit à

$$D_U S = \frac{3k_B N}{2(U + \frac{K_i N^2}{V})} = \frac{1}{T}$$

qui peut se réécrire sous la forme

$$U = \frac{3}{2}k_B NT - \frac{K_i N^2}{V}.$$

La seconde équation d'état conduit à

$$D_V S = \frac{k_B N}{V - Nv_0} + \frac{3k_B N}{2}\frac{\frac{-K_i N^2}{V^2}}{U + \frac{K_i N^2}{V}} = \frac{p}{T}$$

2. **La pression P (en kPa), le volume V (en l) et la température T (en K) d'une mole d'un gaz parfait sont liés par l'équation[8] :**

$$PV = 8,31\,T.$$

Sachant que, lors d'une mesure à l'instant t, la température d'un tel gaz, qui est de $300K$, augmente à la vitesse de $0,1K/s$ et que son volume, qui est de $100\,l$, augmente à raison de $0,2\,l/s$, déterminer la vitesse de variation de la pression de ce gaz.

Solution. La pression diminue à la vitesse de $0,04155\ kPa/s$.

3. **La recherche des extrema d'une fonction à une seule variable est relativement aisée : il suffit de rechercher les valeurs en lesquelles la dérivée de cette fonction s'annule et de voir s'il s'agit d'un minimum, d'un maximum ou d'un point d'inflexion. Cette recherche s'avère plus délicate pour une fonction de plusieurs variables. Cependant, pour une fonction de 2 variables, nous disposons du test suivant, appelé *test des dérivées partielles* :**

Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $(a,b) \in A$ et $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction 2 fois continûment dérivable sur A telle que

$$(D_x f)(a,b) = (D_y f)(a,b) = 0.$$

Posons

$$D = (D_x^2 f)(a,b)(D_y^2 f)(a,b) - [(D_x D_y f)(a,b)]^2.$$

(a) **Si $D > 0$ et si $(D_x^2 f)(a,b) > 0$ alors $f(a,b)$ est un minimum local de f ;**

(b) **Si $D > 0$ et si $(D_x^2 f)(a,b) < 0$ alors $f(a,b)$ est un maximum local de f ;**

(c) **Si $D < 0$ alors $f(a,b)$ n'est ni un minimum local, ni un maximum local de f ; (a,b) est appelé "point-selle" ;**

(d) **Si $D = 0$ alors le test n'est pas concluant.**

En se basant sur ce test,

a) **rechercher les extrema ainsi que les points-selles de la fonction**

8. Cette équation est l'une des équations d'état d'un gaz parfait, obtenue par dérivation partielle de l'entropie d'un tel gaz (cf. exercice précédent).

$$f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Solution. L'origine $(0,0)$ est un point-selle. De plus, $f(1,1) = -1$ et $f(-1,-1) = -1$ sont des minima locaux de f.

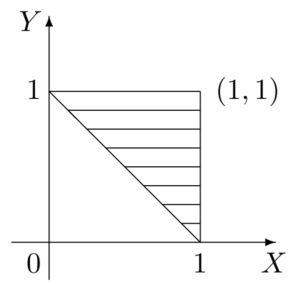
b) **déterminer la distance[9] (c.-à-d. la plus courte distance) entre le point de coordonnées $(1,0,-2)$ et le plan d'équation cartésienne $x + 2y + z = 4$.**

Solution. Le point de coordonnée $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}, -\frac{7}{6})$ correspond à un minimum local (et même global car en géométrie, on prouve que la distance d'un point à un plan est unique) de la distance, qui vaut en ce point $\frac{5\sqrt{6}}{6}$. La distance du point donné au plan donné vaut donc $\frac{5\sqrt{6}}{6}$.

4. **Si une charge électrique est répartie sur une région R et si la densité de charges (en unités par unités carrées) est donnée par $\rho(x,y)$ en un point(x,y) de R, alors la charge totale Q présente sur cette région est donnée par**

$$Q = \iint_R \rho(x,y)\, dxdy.$$

Une charge électrique est distribuée sur le domaine triangulaire D de la figure ci-dessous de manière telle que la densité de charge en (x,y) est donnée par $\rho(x,y) = 2xy$, mesurée en coulombs par mètre carrés (C/m^2). Calculer la charge totale présente sur D.



Solution. La charge totale présente sur le domaine triangulaire donné est de $\frac{5}{12}C$.

5. **En physique, le *moment d'inertie* d'une masse ponctuelle m par rapport à un axe est défini par le produit mr^2, où r est la distance entre la masse ponctuelle m et l'axe. Cette notion se généralise au cas d'une plaque de métal, qui occupe une région R du plan et dont la densité en (x,y) est donnée par $\rho(x,y)$, de la manière suivante.**
Le moment d'inertie d'une telle plaque par rapport à l'axe des abscisses (resp. des ordonnées) vaut

$$I_X = \iint_R x^2 \rho(x,y)\, dxdy \qquad \left(\text{resp. } I_Y = \iint_R y^2 \rho(x,y)\, dxdy\right).$$

9. Suggestion : la distance entre deux points de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) est donnée par
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$
et, comme $d \geq 0$, minimiser d équivaut à minimiser d^2.

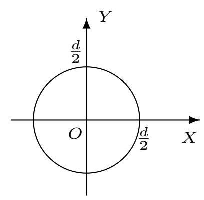
Il peut également être intéressant de considérer le moment d'inertie par rapport à l'origine O, celui-ci étant donné par

$$I_O = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dxdy.$$

On remarque évidemment que $I_O = I_X + I_Y$.

Soit un disque homogène D de densité $\rho(x, y) = \rho$ et de diamètre d. Déterminer
a) **le moment d'inertie de ce disque par rapport à son centre** ;
b) **le moment d'inertie de ce disque par rapport à une droite quelconque d' passant par son centre.**

Solution. a) Considérons le repère orthonormé dont l'origine O est le centre du disque donné, et dont les axes coïncident avec deux droites perpendiculaires passant par O. On obtient dès lors la configuration suivante :



Dans ces conditions, le disque D est décrit par

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right\}$$

ce qui correspond en coordonnées polaires à l'ensemble

$$D' = \left\{ (r, \theta) \mid r \in \left]0, \frac{d}{2}\right],\ \theta \in [0, 2\pi] \right\},$$

auquel on ajoute le centre du disque.
Ainsi, le moment d'inertie du disque D par rapport à son centre correspond au moment d'inertie par rapport à l'origine du repère choisi et est donné par

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dxdy = \iint_{D'} r^2 \rho\, r\, drd\theta = \frac{\pi \rho d^4}{2^5}.$$

b) Vu le choix du repère, le moment d'inertie du disque D par rapport à une droite passant par son centre correspond au moment d'inertie par rapport à l'axe X ou encore par rapport à l'axe Y. On en conclut donc que tous ces moments d'inertie du disque sont égaux, c'est-à-dire $I_X = I_Y = I_{d'}$ quelle que soit la droite d' passant par O. Par conséquent, comme

$$I_O = I_X + I_Y = 2I_{d'},$$

il s'ensuit que

$$I_{d'} = \frac{I_O}{2} = \frac{\pi \rho d^4}{2^6}.$$

6. **Dans certains contextes, le calcul de probabilités peut se ramener à du calcul intégral. En effet, lorsque l'on modélise une quantité X à l'aide d'une fonction de densité $x \mapsto f_X(x)$ positive, intégrable sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale égale à 1, la probabilité que cette quantité soit supérieure (resp. inférieure) à une valeur $a \in \mathbb{R}$ (resp. $b \in \mathbb{R}$) est donnée par**

$$\mathbb{P}[X > a] = \int_a^{+\infty} f_X(x)\,dx \quad \left(\textbf{resp. } \mathbb{P}[X < b] = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,dx\right).$$

De plus, si l'on s'intéresse à une autre quantité Y que l'on désire étudier conjointement avec X, ces deux quantités peuvent être modélisées simultanément à l'aide d'une fonction de densité jointe $(x, y) \mapsto f_{(X,Y)}(x, y)$ positive et intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\,dx\right) dy = 1,$$

auquel cas la probabilité que $(X, Y) \in R$ (R partie de $\mathbb{R}^2$) est donnée par

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in R] = \iint_R f_{(X,Y)}(x, y)\,dxdy.$$

Le patron d'une fabrique de batteries destinées aux appareils électroniques tels que les GSM, les MP-3, etc... s'intéresse à la longévité de ses produits et décide d'étudier conjointement le nombre maximal (qu'il note X), ainsi que le nombre minimal (qu'il note Y), d'années de fonctionnement de ces derniers. Après bien des calculs, il arrive à la conclusion que la fonction de densité jointe de X et Y est de la forme

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \textbf{si} \quad 0 \leq y \leq x \leq 10 \\ 0 \quad \textbf{sinon} \end{cases}.$$

(a) **Déterminer la constante C pour que la fonction $f_{(X,Y)}$ soit bien une fonction de densité jointe.**

(b) **Calculer la probabilité qu'une batterie fonctionne au plus 7 ans mais au moins 2 ans.**

Solution. (a) Pour que la fonction donnée soit une fonction de densité, la constante C doit valoir $\frac{3}{2000}$.

(b) La probabilité que la durée de vie d'une batterie de cette fabrique soit au maximum de 7 ans et au minimum de 2 ans est de $\frac{19}{80} = 0,2375$, c'est-à-dire proche de 24%

7. **Deux variables aléatoires X et Y, modélisées respectivement par les fonctions de densité f_X et f_Y, sont dites indépendantes lorsque leur fonction de densité jointe vaut le produit de leurs fonctions de densité respectives, c.-à-d.**

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

En outre, un temps d'attente T est modélisé par une fonction de densité de la forme

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1} e^{\frac{-t}{\mu}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

où $\mu > 0$ est le temps d'attente moyen.

Le directeur d'un cinéma constate que le temps d'attente moyen pour obtenir un ticket est de 10 minutes, et celui pour obtenir une boisson fraîche de 5 minutes. En supposant que ces temps d'attente sont indépendants, calculer la probabilité qu'un spectateur attende au total moins de 20 minutes avant de

prendre place en ayant son ticket et une boisson.

Solution. Si l'on note X (resp. Y) le temps d'attente pour obtenir un ticket (resp. une boisson fraîche), il vient que $\mathbb{P}[X + Y < 20] = 1 + \frac{1}{e^4} - \frac{2}{e^2} \approx 0,7476$. Par conséquent, environ 75% des spectateurs attendent moins de 20 minutes avant de s'asseoir.

Liste 13 : Mathématiques appliquées (2)

Calcul matriciel

1. **Le mouvement d'une particule se déplaçant dans le plan est régi par les équations différentielles suivantes :**

$$\left\{\begin{array}{lcl} Dx(t) & = & -4x(t)-3y(t)+5t \\ Dy(t) & = & -2x(t)-5y(t)+5e^t \end{array}\right. .$$

Déterminer les composantes $(x(t), y(t))$ du vecteur position de cette particule à tout instant t.

Solution. Le système donné se réécrit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \end{pmatrix}}_{:=DP(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}}_{:=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}_{=P(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 5t \\ 5\,e^t \end{pmatrix}}_{:=B(t)}. \qquad (*)$$

Tentons de diagonaliser la matrice A. On a

$$\det(A-\lambda I) = \lambda^2 + 9\lambda + 14 = (\lambda+2)(\lambda+7)$$

et donc les valeurs propres de A sont -2 (simple) et -7 (simple), ce qui entraîne que A est diagonalisable. Après recherche, il s'avère que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A associés respectivement à -2 et -7. Ainsi, en posant

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ il vient que } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, en posant

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

il vient que

$$\begin{pmatrix} DX(t) \\ DY(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \end{pmatrix},$$

et, en multipliant à gauche par S^{-1} les deux membres de l'égalité $(*)$ ci-dessus, on obtient que

$$\begin{aligned} & S^{-1} \begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \end{pmatrix} = S^{-1}A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + S^{-1} \begin{pmatrix} 5t \\ 5\,e^t \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} DX(t) \\ DY(t) \end{pmatrix} = S^{-1}AS \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + S^{-1} \begin{pmatrix} 5t \\ 5\,e^t \end{pmatrix}. \qquad (**) \end{aligned}$$

Or, $\det(S) = -5$ et l'inverse de S est donnée par

$$S^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, l'équation $(**)$ équivaut à

$$\begin{pmatrix} DX(t) \\ DY(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5t \\ 5\,e^t \end{pmatrix}.$$

ce qui équivaut encore au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} DX(t) & = & -2X(t) - t + e^t \\ DY(t) & = & -7Y(t) + 2t + 3\,e^t \end{array} \right. .$$

Les équations différentielles sont alors *découplées* et peuvent être résolues séparément. Les solutions de ces deux dernières EDLCC sont les fonctions

$$X(t) = C_1 e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4},\ t \in \mathbb{R}$$

et

$$Y(t) = C_2 e^{-7t} + \frac{3}{8}e^t + \frac{2}{7}t - \frac{2}{49},\ t \in \mathbb{R}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Enfin, vu ce qui précède, le vecteur position de la particule à l'instant t est donné par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} Y(t).$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = -3C_1\,e^{-2t} + C_2\,e^{-7t} - \dfrac{5}{8}\,e^t + \dfrac{25}{14}t - \dfrac{155}{196},\ t \in \mathbb{R} \\[2ex] y(t) = 2C_1\,e^{-2t} + C_2\,e^{-7t} + \dfrac{25}{24}\,e^t - \dfrac{5}{7}t + \dfrac{45}{98},\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

où $C_1,\ C_2 \in \mathbb{C}$.

2. **Le mouvement d'une particule se déplaçant dans l'espace est régi par les équations différentielles suivantes :**

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Dx(t) & = & x(t) + 2y(t) - z(t) \\ Dy(t) & = & 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ Dz(t) & = & -x(t) - 2y(t) + z(t) \end{array} \right. .$$

Déterminer les composantes $(x(t), y(t), z(t))$ **du vecteur position de cette particule à tout instant** t**.**

Solution. Le système donné se réécrit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \\ Dz(t) \end{pmatrix}}_{:=DP(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{:=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}}_{=P(t)}. \qquad (*)$$

Les valeurs propres de la matrice A sont 0 (valeur propre double) et 6 (valeur propre simple). Après recherche, il s'avère que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A, linéairement indépendants, associés à 0, ce qui entraîne que la matrice A est diagonalisable puisqu'elle possède au moins 3 vecteurs propres linéairement indépendants. De plus, le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre associé à la valeur propre 6.
Ainsi, en posant

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ il vient que } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, en posant

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

et en multipliant à gauche par S^{-1} les deux membres de l'égalité $(*)$, on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} DX(t) & = & 0 \\ DY(t) & = & 0 \\ DZ(t) & = & 6Z(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} X(t) & = & C_1 \\ Y(t) & = & C_2 \\ Z(t) & = & C_3\, e^{6t} \end{array} \right. ,$$

où $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}$. Dès lors, vu ce qui précède, le vecteur position de la particule à l'instant t est donné par

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 e^{6t} \end{pmatrix} \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{6t}, \quad \text{où } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = C_1 + 2C_2 + C_3\, e^{6t} \\ y(t) = -C_2 + 2C_3\, e^{6t} \\ z(t) = C_1 - C_3\, e^{6t} \end{array} \right. .$$

3. **Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attrapper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :**
   - **étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité $0,9$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,1$;**
   - **étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité $0,5$ ou passer à l'état M avec une probabilité $0,1$;**
   - **étant malade, il peut le rester avec une probabilité $0,2$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,8$.**

   Déterminer

   a) la matrice de transition du système ;

   Solution. Notons respectivement I_0, M_0 et S_0 les probabilités qu'un individu soit immunisé, malade, non malade et non immunisé un jour donné. Le mois suivant, ces probabilités sont respectivement données par

$$\left\{\begin{array}{rcl} I_1 &=& 0,9\,I_0 + 0,4\,S_0 + 0\,M_0 \\ S_1 &=& 0,1\,I_0 + 0,5\,S_0 + 0,8\,M_0 \\ M_1 &=& 0\,I_0 + 0,1\,S_0 + 0,2\,M_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ S_1 \\ M_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 & 0 \\ 0,1 & 0,5 & 0,8 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}}_{:=T} \begin{pmatrix} I_0 \\ S_0 \\ M_0 \end{pmatrix}.$$

Donc, la matrice de transition du système est donnée par la matrice T.

b) la probabilité qu'un individu immunisé soit encore immunisé après deux mois ;

Solution. Si un individu est immunisé un jour donné, la probabilité qu'il soit immunisé deux mois plus tard est de 85%.

c) la probabilité qu'à long terme, un individu soit immunisé.

Solution. A long terme, la probabilité qu'un individu soit immunisé est donnée par $\frac{32}{41}$, c'est-à-dire environ 78%.

4. **Un biologiste étudie le passage d'une molécule de phosphore dans un écosystème. Celle-ci peut se trouver dans le sol, dans l'herbe, dans le bétail ou peut disparaître de l'écosystème. D'une heure à l'autre, le transfert peut s'effectuer selon les modalités suivantes :**
   - étant dans le sol, la molécule a 3 chances sur 5 d'y rester, 3 chances sur 10 de passer dans l'herbe et 1 chance sur 10 de disparaître ;
   - étant dans l'herbe, elle a 1 chance sur 10 de revenir dans le sol, 2 chances sur 5 de rester dans l'herbe et 1 chance sur 2 de se retrouver dans le bétail ;
   - étant dans le bétail, elle a 3 chances sur 4 de retourner dans le sol, 1 chance sur 5 de rester dans le bétail et 1 chance sur 20 de disparaître ;
   - si la molécule disparaît, elle ne réapparaît plus nulle part.
   Déterminer la matrice de transition du système.

   Solution. Notons respectivement B_0, D_0, H_0 et S_0 les probabilités qu'une molécule de phosphore se trouve dans le bétail, disparaisse, soit dans l'herbe et soit dans le sol à une heure donnée. L'heure suivante, ces probabilités sont respectivement données par
   noindent *Solution.* Notons respectivement S_0, H_0, B_0 et D_0 les probabilités qu'une molécule de phosphore se trouve dans le sol, dans l'herbe, dans le bétail et disparaisse à une heure donnée. L'heure suivante, ces probabilités sont respectivement données par

$$\left\{\begin{array}{rcl} S_1 &=& \frac{3}{5}S_0 + \frac{1}{10}H_0 + \frac{3}{4}B_0 + 0D_0 \\ H_1 &=& \frac{3}{10}S_0 + \frac{2}{5}H_0 + 0B_0 + 0D_0 \\ B_1 &=& 0S_0 + \frac{1}{2}H_0 + \frac{1}{5}B_0 + 0D_0 \\ D_1 &=& \frac{1}{10}S_0 + 0H_0 + \frac{1}{20}B_0 + 1D_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} S_1 \\ H_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{20} & 1 \end{pmatrix}}_{:=T} \begin{pmatrix} S_0 \\ H_0 \\ B_0 \\ D_0 \end{pmatrix}.$$

   Donc, la matrice de transition du système est donnée par la matrice T.

5. **La cryptographie, pour beaucoup de monde, est un moyen de maintenir des communications privées. En effet, la protection des communications sensibles a été l'objectif principal de la cryptographie dans la grande partie de son histoire. Le *chiffrage* est la transformation des données dans une forme illisible.**

Son but est d'assurer la sécurité en maintenant l'information cachée aux gens à qui l'information n'est pas adressée, même ceux qui peuvent voir les données chiffrées. Le *déchiffrage* est l'inverse du chiffrage ; c'est la transformation des données chiffrées dans une forme intelligible.
Aujourd'hui, les gouvernements emploient des méthodes sophistiquées de codage et de décodage des messages. Un type de code, qui est extrêmement difficile à déchiffrer, se sert d'une grande matrice pour coder un message. Le récepteur du message le décode en employant l'inverse de la matrice. Voici un exemple de codage/décodage d'un message par ce procédé.
Considérons le message

SUIS EN DANGER

ainsi que la matrice de codage

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = C.$$

Pour le codage, on assigne à chaque lettre de l'alphabet un nombre, à savoir simplement sa position dans l'alphabet, c'est-à-dire A correspond à 1, **B correspond à** $2, \ldots$, **Z correspond à** 26. **En outre, on assigne le nombre** 27 **à un espace. Ainsi, le message devient :**

S	**U**	**I**	**S**	*****	**E**	**N**	*****	**D**	**A**	**N**	**G**	**E**	**R**
19	**21**	**9**	**19**	**27**	**5**	**14**	**27**	**4**	**1**	**14**	**7**	**5**	**18**

Puisqu'on emploie une matrice 2×2, **on décompose la forme numérique de ce message en une suite de vecteurs**[10] 1×2 **:**

$$(19 \quad 21), \ (9 \quad 19), \ (27 \quad 5), \ (14 \quad 27), \ (4 \quad 1), \ (14 \quad 7), \ (5 \quad 18).$$

On code alors le message en multipliant chacun de ces vecteurs par la matrice de codage C, **ce qui peut être fait en définissant une matrice dont les lignes sont ces vecteurs et en multipliant cette dernière par** C, **ce qui nous donne :**

$$\begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix}$$

Dès lors, le message crypté est donné par les lignes de cette dernière matrice que l'on place bout à bout pour la transmission :

$$-2, \ 25, \ -10, \ 39, \ 22, \ -39, \ -13, \ 53, \ 3, \ -5, \ 7, \ -7, \ -13, \ 44.$$

Enfin, pour décoder le message, le récepteur a recours à la même technique que celle employée pour le codage mais en utilisant l'inverse de la matrice de codage, qui est donnée ici par

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Dans le cas où il faut compléter le dernier vecteur, il suffit d'y placer des "27", ce qui revient à compléter le message par des espaces pour avoir un nombre de caractères qui soit multiple de la dimension de la matrice de codage.

Il doit donc calculer le produit

$$\begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}$$

et il retrouve bien la matrice correspondant au message de départ, ce qui lui permet de lire le message :

$$\begin{matrix} \mathbf{19} & \mathbf{21} & \mathbf{9} & \mathbf{19} & \mathbf{27} & \mathbf{5} & \mathbf{14} & \mathbf{27} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{14} & \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{18} \\ \mathbf{S} & \mathbf{U} & \mathbf{I} & \mathbf{S} & * & \mathbf{E} & \mathbf{N} & * & \mathbf{D} & \mathbf{A} & \mathbf{N} & \mathbf{G} & \mathbf{E} & \mathbf{R} \end{matrix}.$$

Le Gouvernement a réussi à intercepter le message crypté suivant, provenant de l'ennemi public n°1 et destiné à l'ennemi public n°2 :

$-18,\ -21,\ -31,\ 53,\ 48,\ 61,\ 3,\ -15,\ -21,\ -34,\ -30,\ -43,\ 45,\ 42,\ 48$**.**
L'un de ses meilleurs espions infiltrés, James Bond, a découvert que la matrice utilisée par l'ennemi pour coder ce message est la suivante :

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Malheureusement, il n'y connaît rien en calcul matriciel et personne ne peut déchiffrer ce message... Votre mission est de décoder ce message dans les plus brefs délais.

Solution. La matrice de décodage est donnée par l'inverse de la matrice de codage, c'est-à-dire la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le message est le suivant :

$$\begin{matrix} 22 & 9 & 12 & 1 & 9 & 14 & 27 & 3 & 21 & 18 & 9 & 5 & 21 & 24 & 27 \\ \mathrm{V} & \mathrm{I} & \mathrm{L} & \mathrm{A} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & * & \mathrm{C} & \mathrm{U} & \mathrm{R} & \mathrm{I} & \mathrm{E} & \mathrm{U} & \mathrm{X} & * \end{matrix}.$$

Approximations polynomiales

La vitesse v d'une vague est liée à sa longueur d'onde λ et à la profondeur h de l'eau (exprimées en mètres) par l'expression

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\ \mathbf{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right),$$

où g est l'accélération due à la pesanteur.

- **Sachant que th :** $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$**, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de cette fonction.**
- **Grâce à cette approximation, en sachant que la vague qui a ravagé le Japon en 2011 avait une longueur d'onde de 5 km, à combien peut-on estimer la vitesse du tsunami lors de son arrivée près des côtes (on suppose alors que la profondeur de l'eau est de 2 m) ?**

Solution. - La fonction th : $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée première est

$$D\mathrm{th}(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

Comme $\mathrm{th}(0) = 0$ et $D\mathrm{th}(0) = 1$, l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de cette fonction est le polynôme $P(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$.

- Si $\lambda = 5$ km $= 5000$ m et $h = 2$ m, alors la valeur de $\frac{2\pi h}{\lambda}$ est proche de 0 et, en utilisant l'approximation polynomiale ci-dessus, on a

$$v^2 \approx \frac{g\lambda}{2\pi} \cdot \frac{2\pi h}{\lambda} = gh.$$

Ainsi, la vitesse de la vague du tsunami lors de son arrivée près des côtes était $\sqrt{2 \,.\, 9,81} = 4,429$ m/s.

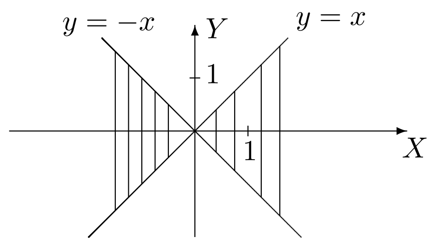
Liste 14 : Révisions en vue de l'examen

Fonctions de plusieurs variables

1. **On donne la fonction** $f : (x, y) \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}\right)$.

   a) Déterminer son domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.

   Solution. Les 2 domaines sont égaux à $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y,\ \dfrac{x+y}{x-y} > 0\right\}$



   Les points des droites sont exclus de l'ensemble.

   b) Déterminer les dérivées partielles de cette fonction et, si possible, les évaluer au point de coordonnées $(-2, 1)$.

   Solution. Les dérivées partielles de la fonction sont données par

$$D_x f(x,y) = \frac{-y}{x^2 - y^2} \qquad\qquad D_y f(x,y) = \frac{x}{x^2 - y^2}$$

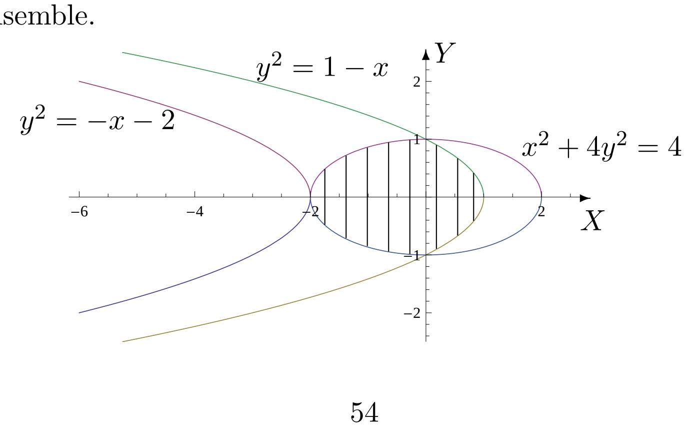
   et, comme le point de coordonnées $(-2, 1)$ appartient au domaine de dérivabilité, on a $D_x f(-2, 1) = \frac{-1}{3}$ et $D_y f(-2, 1) = \frac{-2}{3}$.

2. **Soit f une fonction continûment dérivable sur $]-2, 1[\times]-4, 4[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x, y) = f(x + y^2, x^2 + 4y^2)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.**

   Solution. Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x + y^2 < \ 1,\ -4 < x^2 + 4y^2 < 4\}.$$

   Il est représenté par l'ensemble des points hachurés ci-dessous, les points des courbres étant exclus de l'ensemble.



Les dérivées partielles de F sont données par

$$(D_xF)(x,y) = (D_uf)(x+y^2, x^2+4y^2)\ .\ 1 + (D_vf)(x+y^2, x^2+4y^2)\ .\ 2x$$

$$(D_yF)(x,y) = (D_uf)(x+y^2, x^2+4y^2)\ .\ 2y + (D_vf)(x+y^2, x^2+4y^2)\ .\ 8y$$

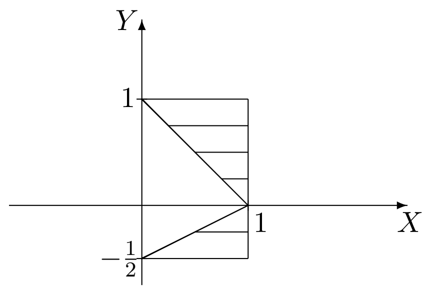
si u et v sont respectivement la première et la seconde variable de f.

3. **Si elles existent, calculer les intégrales suivantes**

a) $I = \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 x \sin(y^5)\, dy \right) dx$

Solution. On a $I = \frac{1}{10}(1 - \cos(32))$

b) $I = \iint_A e^{-y^2}\, dx\, dy$ **si** A **est l'ensemble fermé borné hachuré ci-dessous**



Solution. On a $I = \frac{3}{2} - \frac{1}{2e} - \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$.

c) $I = \iint_A \frac{1}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^5}}\, dx\, dy$ **si** $A = [0, +\infty[\times [0, +\infty[$

Solution. On a $I = \frac{\pi}{6}$

d) $I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^2 \frac{e^{-(y+1)x}}{4+y^2}\, dy \right) dx$

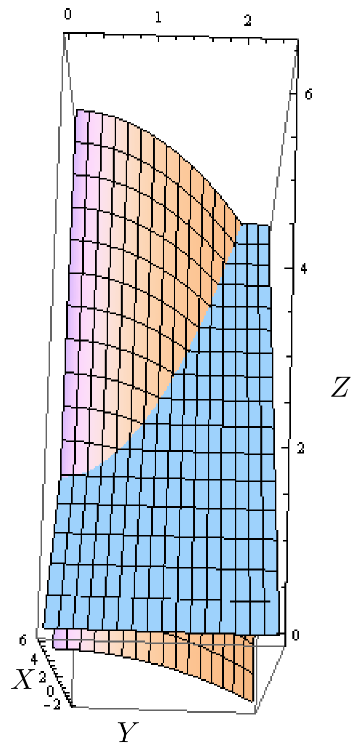
Solution. On a $I = \frac{1}{5}\left(\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{8} \right)$.

4. **Calculer le volume du corps de l'espace borné par les surfaces d'équation cartésienne** $x + z = 6$ **et** $x + y^2 = 4$ **et les plans d'équation** $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$**. Donner aussi une représentation graphique de ce corps.**

Solution. Le volume du corps vaut

$$V = \int_0^2 \left(\int_0^{4-y^2} (6-x)\ dx \right) dy = \frac{352}{15}$$

et voici sa représentation graphique (partie "sous" le plan)



Calcul matriciel

1. **Calculer (si elle existe) la matrice inverse de la matrice suivante puis montrer que la matrice trouvée est bien l'inverse de la matrice donnée si**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution. Comme $\det A = 3 \neq 0$, la matrice inverse de A existe et on a

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ si I est la matrice identité de dimension 3.

2. **Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit puis prouver que les matrices données sont correctes.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution. Les valeurs propres de A sont -1 (simple) et 5 (double).
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double 5 sont les vecteurs

$$c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c et c' sont des complexes non simultanément nuls. Dès lors, la matrice A est diagonalisable puisqu'elle possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple -1 sont les vecteurs

$$c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

Ainsi, on a, par exemple,

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad \Delta = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices données sont correctes puisque

$$AS = S\Delta = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Approximations polynomiales

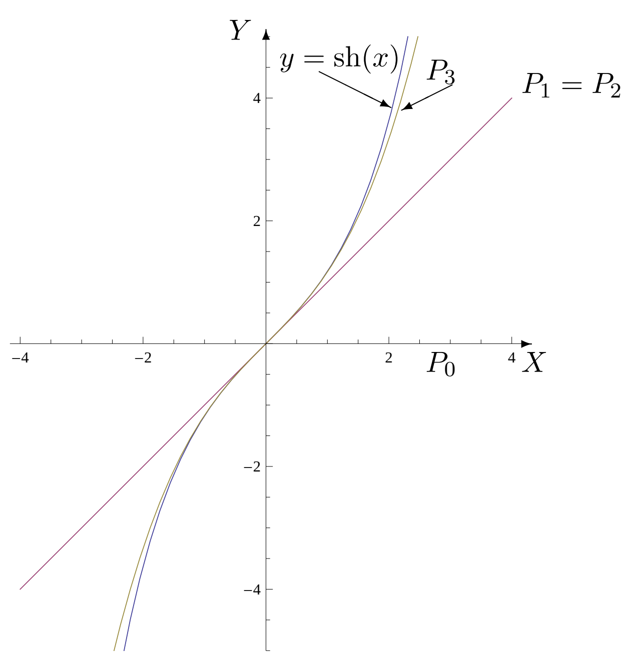
Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $n = 0, 1, 2$ et 3 en $x_0 = 0$ pour la fonction

$$f : x \mapsto \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Représenter f et ses approximations.

Solution. Si on note $P_n(x)$ l'approximation à l'ordre n en 0, puisque f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, on a

$$P_0(x) = 0, \quad P_1(x) = P_2(x) = x \quad \text{et } P_3(x) = x + \frac{x^3}{6},\ x \in \mathbb{R}.$$



Séries

1. **Etudier la convergence des séries suivantes :**

$$(1)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\sin(k\theta)}{k(k+1)}\ \ (\theta \geq 0) \qquad\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n}.$$

Solution.
(1) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente.
(2) Série divergente car son terme général ne tend pas vers zéro.

2. **Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent :**

$$(1)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{k}} \qquad (2)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k+5)(2k+3)} \qquad (3)\ \sum_{n=3}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] \qquad (4)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^n(x)}{n!}\ (x > 0).$$

Solution.
(1) Série de Riemann divergente car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.
(2) Série convergente ; la somme de la série vaut $-\frac{1}{5}$
(3) Série convergente ; la somme de la série vaut $\frac{41}{24}$
(4) Série exponentielle ; la somme de la série vaut $x - 1$.