1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

*Mathématiques générales : partim B**

Révisions : Physique

Correction

Version 18 mai 2016

Révisions*

I. Equations différentielles

Résoudre les équations différentielles suivantes (f est une fonction de la variable réelle x).

(a) $x^3 Df(x) + xf(x) = x,\quad f(1) = 0$ **(resp.** $f(1) = 1$**)**

(b) $(x^4 + 3)Df(x) - x^3 \cos^2(f(x)) = 0$

(c) $\sin(\ln(x))xDf(x) + \cos(\ln(x))f(x) = 0,$ **sur** $]e^{-\pi}, 1[$

(d) $Df(x) + \dfrac{2x}{x^2+5} f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 + 15x}{3}},\quad f(0) = 0$

(a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants qui se réécrit ($x \neq 0$)

$$Df(x) = -\frac{1}{x^2} f(x) + \frac{1}{x^2}.$$

Les fonctions $a\ :\ x \mapsto -1/x^2$ et $b\ :\ x \mapsto 1/x^2$ sont continues sur $\mathbb{R}_0$. Une primitive de a sur $]0, +\infty[$ (resp. $]-\infty, 0[$) est donnée par $A(x) = 1/x,\ x > 0$ (resp. $x < 0$) et une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$ sur $]0, +\infty[$ (resp. $]-\infty, 0[$) est $x \mapsto e^{-1/x},\ x > 0$ (resp. $x < 0$). Sur $]0, +\infty[$ (resp. $]-\infty, 0[$), les solutions sont donc les fonctions

$$\left(c + e^{-1/x}\right)\ e^{1/x}$$

où C est une constante arbitraire. Cela étant, en considérant la condition initiale

- $f(1) = 0$, on conclut que $C = -1$ donc que la solution est

$$\boxed{f(x) = 1 - e^{\frac{1}{x}}},\quad x > 0.$$

- $f(1) = 1$, on conclut que $C = 0$ donc que la solution est

$$\boxed{f(x) = 1},\quad x > 0.$$

(b) Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire d'ordre 1 qui se réécrit

$$Df(x) = \frac{x^3}{x^4+3} \cos^2(f(x)).$$

Elle est donc à second membre séparé.

Cela étant, supposons que I soit un intervalle ouvert sur lequel f est continûment dérivable et telle que $\cos(f(x)) \neq 0$ quel que soit $x \in I$. . On alors

$$\int \frac{Df(x)}{\cos^2(f(x))}\, dx = \int D(\mathrm{tg}(f(x)))\, dx \simeq \mathrm{tg}(f(x)),\quad x \in I.$$

Si de plus f vérifie l'équation différentielle, alors il s'ensuit que

$$\int \frac{Df(x)}{\cos^2(f(x))}\, dx = \int \frac{x^3}{x^4+3}\, dx = \frac{1}{4} \int D\ln(x^4+3)\, dx \simeq \frac{1}{4} \ln(x^4+3),\quad x \in I.$$

Il existe donc $C \in \mathbb{C}$ tel que

$$\boxed{\mathrm{tg}(f(x)) = \frac{1}{4} \ln(x^4+3) + C}\qquad \forall x \in I.$$

Réciproquement, si I est in intervalle où f est de classe C_1 et $im(f) \subset dom(\mathrm{tg})$, alors f donné implicitement par la relation ci-dessus est bien une solution de l'équation de départ.

Notons enfin que quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, la fonction constante $\boxed{f_k(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x \in \mathbb{R}}$ est aussi solution de l'équation.

(c) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients non constants qui se réécrit

$$Df(x) = -\frac{\cos(\ln(x))}{x\sin(\ln(x))} f(x) = -\frac{1}{x}\text{cotg}(\ln(x))\ f(x)$$

dans un intervalle ouvert $I \subset]0, +\infty[$ tel que $\ln(x) \neq k\pi$ quels que soient $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in I$. En particulier, le problème est bien posé avec $I =]e^{-\pi}, 1[$. Comme le coefficient $a(x) = -\frac{1}{x}\text{cotg}(\ln(x)),\ x \in I$ est continu sur l'intervalle I, les solutions sont les fonctions

$$Ce^{A(x)}, \quad x \in I$$

où A est une primitive de a sur I ; par primitivation immédiate, on voit que

$$A(x) = \ln(-\sin(\ln(x))), \quad x \in I$$

convient. Finalement, on obtient donc l'ensemble de solutions

$$\boxed{f(x) = \frac{C}{\sin(\ln(x))}, \quad x \in I}$$

où C est une constante arbitraire.

(d) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire non homogène d'ordre 1 à coefficients non constants qui se réécrit

$$Df(x) = -\frac{2x}{x^2+5} f(x) + \sqrt{\frac{x^3+15x}{3}}$$

Comme le coefficient $a(x) = -\frac{2x}{x^2+5},\ x \in \mathbb{R}$, et le terme indépendant $b(x) = \sqrt{\frac{x^3+15x}{3}},\ x \in \mathbb{R}$, sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$(C + P(x))e^{A(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où A est une primitive de A sur $\mathbb{R}$ et où P est une primitive de $x \mapsto b(x)e^{-A(x)}$ sur $\mathbb{R}$. Un calcul direct donne

$$A(x) = -\ln(x^2+5), \quad x \in \mathbb{R}$$

et

$$\begin{aligned} P(x) &= \int b(x)e^{-A(x)}\,dx = \int \sqrt{\frac{x^3+15x}{3}}(x^2+5)\,dx \\ &= \frac{2}{3}\int D\left(\frac{x^3+15x}{3}\right)^{3/2} dx \\ &\simeq \frac{2}{3}\left(\frac{x^3+15x}{3}\right)^{3/2}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dès lors, la solution générale de l'équation s'écrit

$$f(x) = e^{A(x)}(P(x)+C) = \frac{1}{x^2+5}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x^3+15x}{3}\right)^3} + C\right), \quad x \in I.$$

où C est une constante arbitraire.

Cela étant, en tenant compte de la condition initiale $f(0) = 0$, on conclut que $C = 0$ et que donc la solution unique cherchée est

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{3(x^2+5)}\sqrt{\left(\frac{x^3+15x}{3}\right)^3}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

II. Analyse vectorielle

1. **Dans un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan, on considère l'astroïde d'équation cartésienne**

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1.$$

(a) Déterminer un paramétrage du morceau $\mathcal{C}$ de cette astroïde situé dans le premier quadrant.
(b) Déterminer la longueur de $\mathcal{C}$.
(c) Déterminer un paramétrage de la surface $\mathcal{S}$ délimitée par $\mathcal{C}$ et les axes du repère.
(d) Calculer l'aire de cette surface $\mathcal{S}$.

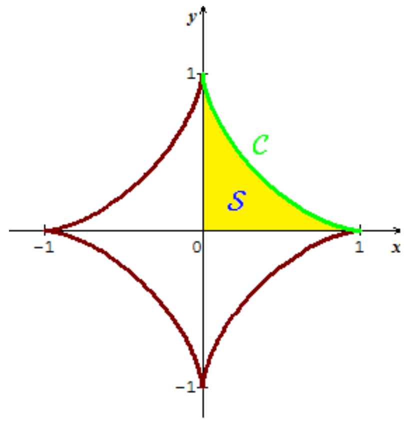

FIGURE 1 – Astroïde.

(a) Un paramétrage (injectif) de $\mathcal{C}$ est donné par

$$\vec{\gamma} \,:\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \left[\cos^3(t),\ \sin^3(t)\right].$$

Ce paramétrage est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$D\vec{\gamma}(t) = \left[-3\cos^2(t)\sin(t),\ 3\sin^2(t)\cos(t)\right] = 3\sin(t)\cos(t)\left[-\cos(t),\ \sin(t)\right] \neq \vec{0} \quad \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

ce qui montre qu'il est régulier, et

$$\|D\vec{\gamma}(t)\| = 3\sin(t)\cos(t).$$

(b) Comme cette norme est continue sur le borné fermé $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, elle y est intégrable et la longueur de $\mathcal{C}$ vaut

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|D\vec{\gamma}(t)\|\, dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t)\, dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(2t)\, dt = \frac{3}{4}\left[-\cos(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$$

(unités de longueur).

(c) Un paramétrage (injectif) de $\mathcal{S}$ est donné par

$$\vec{\phi} \,:\, (t, u) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 1] \mapsto \left[\cos^3(t),\ u\sin^3(t),\ 0\right].$$

Ce paramétrage est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$D_t\vec{\phi}(t, u) = \left[-3\cos^2(t)\sin(t),\ 3u\sin^2(t)\cos(t),\ 0\right] = 3\sin(t)\cos(t)\left[-\cos(t),\ u\sin(t),\ 0\right],$$

et

$$D_u\vec{\phi}(t, u) = \left[0,\ \sin^3(t),\ 0\right],$$

de sorte que

$$D_t\vec{\phi}(t,u) \wedge D_u\vec{\phi}(t,u) = 3\sin(t)\cos(t)\left[0,\ 0,\ -\cos(t)\sin^3(t)\right] \neq \vec{0} \qquad \forall (t,u) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times]0,1[,$$

ce qui montre qu'il est régulier, et

$$\|D_t\vec{\phi}(t,u) \wedge D_u\vec{\phi}(t,u)\| = 3\cos^2(t)\sin^4(t) \qquad \forall (t,u) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times]0,1[.$$

(b) Comme cette norme est continue sur le borné fermé $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,1]$, elle y est intégrable et l'aire de la surface $\mathcal{S}$ vaut donc

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} d\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \|D_t\vec{\phi}(t,u) \wedge D_u\vec{\phi}(t,u)\|\, dudt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sin^4(t)\cos^2(t)\, dudt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2(2t)\,\frac{1}{2}\left(1-\cos(2t)\right)\, dt \\
&= \frac{3}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos(4t))\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2t)\cos(2t)\right) = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(4t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{6}\left[\sin^3(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{3\pi}{32}
\end{aligned}$$

(unités d'aire).

2. **Dans un repère orthonormé $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ du plan, on considère l'arcade de cycloïde $\mathcal{C}$ paramétrée par**

$$(t-\sin t,\ 1-\cos t)\,,\quad t \in [0,2\pi].$$

Calculer les intégrales suivantes.

$$\textbf{(a)} \int_{\mathcal{C}} y^2\, dx \qquad\qquad \textbf{(b)} \int_{\mathcal{C}} y^2\, dy$$

Le paramétrage de $\mathcal{C}$ donné

$$\vec{\gamma}\ :\ t \in [0,2\pi] \mapsto [t-\sin t,\ 1-\cos t]\,.$$

est injectif, et (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$\begin{aligned}
D\vec{\gamma}(t) = [1-\cos(t),\ \sin(t)] &= \left[2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right),\ 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right] \\
&= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{t}{2}\right),\ \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]. \neq \vec{0} \quad \forall t \in\ ]0,2\pi[\,,
\end{aligned}$$

ce qui montre qu'il est régulier.
Notons de plus que ce paramétrage correspond à l'orientation « aire à droite » par rapport à la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.
Comme l'intégrand $f\ : (x,y) \mapsto y^2$ est continu sur la courbe (bornée fermée), les deux intégrales ont un sens et il vient alors que

$$\begin{aligned}
(a) \int_{\mathcal{C}} y^2\, dx &= \int_0^{2\pi} (1-\cos(t))^2(1-\cos(t))\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos(t) + 3\cos^2(t) - \cos^3(t)\right]\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos(t) + \frac{3}{2}(1+\cos(2t)) - (1-\sin^2(t))\cos(t)\right]\, dt \\
&= 5\pi
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
(b)\int_{\mathcal{C}} y^2\,dy &= \int_0^{2\pi} (1-\cos(t))^2 \sin(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} D\left((1-\cos(t))^3\right)\,dt \\
&= \frac{1}{3}\left[(1-\cos(t))^3\right]_0^{2\pi}\,dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$

pour l'orientation considérée.

3. **Calculer l'intégrale**

$$
\int_{\mathcal{E}} xy\,ds \qquad \textbf{où} \qquad \mathcal{E} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; \frac{x^2}{4}+y^2=1,\; y\geq 0\right\}.
$$

Un paramétrage (injectif) de $\mathcal{E}$ est donné par

$$
\vec{\gamma} \;:\; t\in[0,\pi] \mapsto [2\cos(t),\; \sin(t)]\,.
$$

Ce paramétrage est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$
D\vec{\gamma}(t) = [-2\sin(t),\; \cos(t)] \neq \vec{0} \quad \forall t\in\;]0,\pi[\,,
$$

ce qui montre qu'il est régulier, et

$$
\|D\vec{\gamma}(t)\| = \sqrt{4\sin^2(t)+\cos^2(t)} = \sqrt{3\sin^2(t)+1}.
$$

Comme l'intégrand $f\;:(x,y)\mapsto xy$ est continu sur la courbe (bornée fermée), l'intégrale a un sens et vaut

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{E}} xy\,ds &= \int_0^{\pi} 2\cos(t)\sin(t)\,\|D\vec{\gamma}(t)\|\,dt = 2\int_0^{\pi}\cos(t)\sin(t)\sqrt{3\sin^2(t)+1}\,dt \\
&= \frac{2}{6}\int_0^{\pi}\frac{2}{3}D\left(\left(3\sin^2(t)+1\right)^{\frac{3}{2}}\right)\,dt \\
&= \frac{2}{9}\left[\left(3\sin^2(t)+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

4. **Calculer l'intégrale**

$$
\int_{\mathcal{D}} (y\,dx - x\,dy) \qquad \textbf{où} \qquad \mathcal{D}\ \textbf{est le segment joignant les points}\ (0,0)\ \textbf{et}\ (1,2)\textbf{.}
$$

Un paramétrage (injectif) de $\mathcal{D}$ est donné par

$$
\vec{\gamma} \;:\; t\in[0,1] \mapsto [t,\; 2t]\,.
$$

Ce paramétrage oriente le segment de l'origine $(0,0)$ vers le point $(1,2)$ et est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$
D\vec{\gamma}(t) = [1,\; 2]\,. \neq \vec{0} \quad \forall t\in\;]0,1[\,,
$$

ce qui montre qu'il est régulier.
Comme l'intégrand $\vec{f}\;:(x,y)\mapsto[y,-x]$ est continu sur la courbe (bornée fermée), l'intégrale a un sens et vaut

$$
\int_{\mathcal{D}} (y\,dx - x\,dy) = \int_0^1 (2t.1\;-t.2)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0
$$

pour l'orientation considérée.

5. **Calculer l'intégrale**

$$\iint_{\Sigma} \left((x-1)^2+y^2\right) d\sigma \qquad \textbf{où} \qquad \Sigma \textbf{ est le disque centré en } (1,0) \textbf{ et de rayon } 2.$$

Un paramétrage (injectif) de Σ est donné par

$$\vec{\phi} \,:\, (r,\theta) \in [0,2] \times [0,2\pi] \mapsto [1+r\cos(\theta),\ r\sin(\theta),\ 0]\,.$$

Ce paramétrage est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$D_\theta\vec{\phi}(r,\theta) = [-r\sin(\theta),\ r\cos(\theta),\ 0] = r\,[-\sin(\theta),\ \cos(\theta),\ 0]\,,$$

et

$$D_r\vec{\phi}(r,\theta) = [\cos(\theta), \sin(\theta),\ 0]\,,$$

de sorte que

$$D_r\vec{\phi}(r,\theta) \wedge D_\theta\vec{\phi}(r,\theta) = r\,[0,\ 0,\ 1] \neq \vec{0} \qquad \forall (r,\theta) \in \,]0,2[\times]0,2\pi[\,,$$

ce qui montre qu'il est régulier, et

$$\|D_r\vec{\phi}(r,\theta) \wedge D_\theta\vec{\phi}(r,\theta)\| = r \qquad \forall (r,\theta) \in \,]0,2[\times]0,2\pi[\,.$$

Comme l'intégrand $f\,:(x,y) \mapsto (x-1)^2+y^2$ est continu sur la surface (bornée fermée), l'intégrale a un sens et vaut

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \left((x-1)^2+y^2\right)\ d\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 f(\vec{\phi}(r,\theta))\,\|D_r\vec{\phi}(r,\theta) \wedge D_\theta\vec{\phi}(r,\theta)\|\ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(((1+r\cos(\theta))-1)^2+(r\sin(\theta))^2\right)\ r\ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\ drd\theta \\
&= 8\pi.
\end{aligned}$$