1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

QUESTIONNAIRE ET CORRIGÉ
EXAMEN DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES B DU 22 AOÛT 2016
INFORMATICIENS

Version 22 juillet 2016

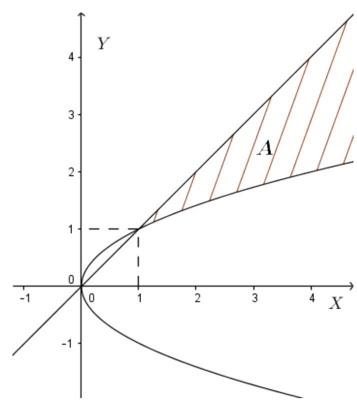
QUESTIONNAIRE

1. On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$.

   (a) Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable.
   (b) En simplifiant au maximum, calculer $D_x D_y f(x,y)$ et $D_y D_x f(x,y)$ et comparer les résultats obtenus.

2. On donne la fonction f par
$$f(x) = \cos^2(x),\ x \in \mathbb{R}.$$
   (a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0.
   (b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations en application du développement limité de Taylor.
   (c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0.

3. On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{1}{xy^4}$ (l'une des courbes délimitant l'ensemble A est une droite et l'autre une parabole).
   Si c'est possible, calculer
$$I = \int\int_A f(x,y)\ dx\ dy.$$
   en justifiant vos démarche et réponse.



4. On donne l'ensemble
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \leq 0\ \ ,\ y \geq 0 \text{ et } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3\right\}$$
   et la fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{y^2}{x^2+y^2}$.
   Si c'est possible, calculer
$$I = \int\int_A f(x,y)\ dx\ dy$$
   en justifiant vos démarche et réponse.

5. Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme
$$(a)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{3m}{m^2+3}, \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\ , \qquad (c)\ \sum_{n=2}^{+\infty} 3^{2-\frac{n}{2}}.$$

6. (a) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_0$. Factoriser le déterminant de la matrice
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$$
   et en déduire que celui-ci est nul si et seulement si $a = b$ ou $a = c$ ou $b = c$.

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer les valeurs propres de cette matrice.
(2) Si c'est possible, déterminer une matrice inversible qui transforme A en une matrice diagonale et donner l'expression de cette matrice diagonale.

CORRIGÉ

Exercices

1. **On donne explicitement la fonction f par $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$.**

(a) Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable.

Solution. La fonction f est deux fois dérivable sur l'ensemble A décrit par

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\right\}.$$

(b) En simplifiant au maximum, calculer $D_x D_y f(x, y)$ et $D_y D_x f(x, y)$ et comparer les résultats obtenus.

Solution. En un point de A, on a

$$D_y f(x, y) = D_y \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right) = \frac{-x}{y^2 + x^2}.$$

Par conséquent, en un point de A, l'expression $D_x D_y f(x, y)$ vaut

$$D_x \left(\frac{-x}{y^2 + x^2}\right) = \frac{-(y^2 + x^2) + 2x^2}{(y^2 + x^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(y^2 + x^2)^2}.$$

En un point de A, on a

$$D_x f(x, y) = D_x \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} . \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2}.$$

Par conséquent, en un point de A, l'expression $D_y D_x f(x, y)$ vaut

$$D_y \left(\frac{y}{y^2 + x^2}\right) = \frac{y^2 + x^2 - 2y^2}{(y^2 + x^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(y^2 + x^2)^2}.$$

Ces deux expressions sont donc identiques.

2. **On donne la fonction f par**

$$f(x) = \cos^2(x), \ x \in \mathbb{R}.$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0**.**

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$Df(x) = -2\cos(x)\sin(x) = -\sin(2x), \quad D^2 f(x) = -2\cos(2x) \quad \textit{et} \quad D^3 f(x) = 4\sin(2x).$$

Comme $f(0) = 1$, $Df(0) = 0$ et $D^2f(0) = -2$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

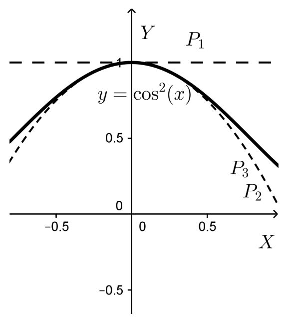
$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 1, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1 - x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations en application du développement limité de Taylor.

Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u_1, u_2 strictement compris entre 0 et x tels que

$$R_1(x) = -2\cos(2u_1).\frac{x^2}{2!} = -\cos(2u_1)x^2, \quad R_2(x) = 4\sin(2u_2).\frac{x^3}{3!} = \frac{2\sin(2u_2)\,x^3}{3}.$$

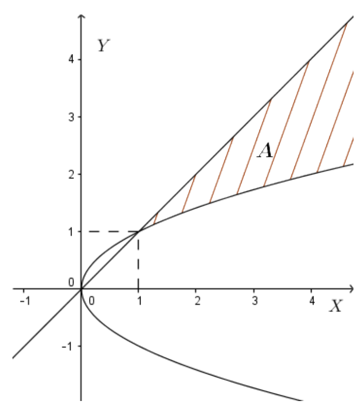
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0.
Solution.



3. **On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{xy^4}$ (l'une des courbes délimitant l'ensemble A est une droite et l'autre une parabole).**
Si c'est possible, calculer

$$I = \int\int_A f(x,y)\ dx\ dy.$$

en justifiant vos démarche et réponse.



Solution. Puisque ces courbes passent toutes les deux par les points de coordonnées $(0,0)$ et $(1,1)$, la droite a pour équation $y = x$ et la parabole $x = y^2$. L'ensemble d'intégration A est donc décrit par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1,+\infty[,\ x \in [y,y^2]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,+\infty[,\ y \in [\sqrt{x},x]\}$. Comme la fonction f est continue sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\}$, elle est continue sur A, non fermé borné. Elle y est aussi positive.

Etudions l'intégrabilité de f sur A.
Pour x fixé dans $[1,+\infty[$, la fonction $h : y \mapsto \frac{1}{xy^4}$ est continue et positive sur $[\sqrt{x},x]$, fermé borné. Elle y est donc intégrable. On a

$$\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{1}{xy^4}\ dy = \frac{1}{x}\left[\frac{-1}{3y^3}\right]_{\sqrt{x}}^{x} = -\frac{1}{3x}\ \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^4}\right).$$

Considérons $g : x \mapsto \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^4}\right)$, fonction continue et positive sur l'intervalle non borné $[1, +\infty[$. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme g est continu sur $[1, t]$ $\forall t > 1$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^4}\right) dx = \frac{1}{3} \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \left(\frac{1}{x^2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^4}\right) dx = \frac{1}{3} \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{-2}{3x\sqrt{x}} + \frac{1}{3x^3}\right]_1^t = \frac{1}{9}.$$

Vu que cette limite est finie, g est intégrable en $+\infty$ donc sur $[1, +\infty[$ et l'intégrale de g sur cet ensemble vaut $\dfrac{1}{9}$.

Dès lors, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on a $I = \dfrac{1}{9}$.

4. **On donne l'ensemble**

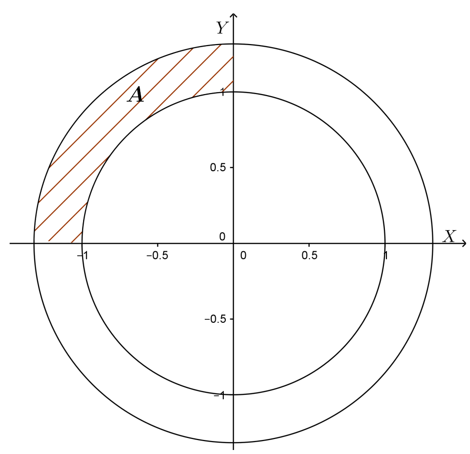
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \leq 0 \ \ , \ y \geq 0 \text{ et } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3\right\}$$

et la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$**.**
Si c'est possible, calculer

$$I = \int\int_A f(x, y) \ dx \ dy$$

en justifiant vos démarche et réponse.

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration A ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



La fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ donc sur A, ensemble borné fermé. Dès lors, la fonction est intégrable sur A.
Utilisons les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale demandée. Les rayons des deux cercles étant égaux à 1 et $\sqrt{3}$, l'ensemble d'intégration décrit en coordonnées polaires est

$$A' = \left\{(r, \theta) : r \in [1, \sqrt{3}], \ \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right\}.$$

La fonction à intégrer est la fonction

$$g : (r, \theta) \mapsto f(r\cos(\theta), \ r\sin(\theta)) = \frac{r^2\sin^2(\theta)}{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)} = \frac{r^2\sin^2(\theta)}{r^2} = \sin^2(\theta)$$

multipliée par le jacobien égal à r. Par application du théorème d'intégration par changement de variables, l'intégrale demandée est donc égale à

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r \ \sin^2(\theta) \ d\theta \right) dr &= \int_1^{\sqrt{3}} r \ dr \ . \ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \ d\theta \\
&= \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^{\sqrt{3}} . \ \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) . \frac{1}{2} . \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} . \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

5. **Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme**

$$(a) \ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{3m}{m^2+3}, \qquad (b) \ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \ , \qquad (c) \ \sum_{n=2}^{+\infty} 3^{2-\frac{n}{2}}.$$

Solution. (a) On a

$$\frac{3m}{m^2+3} \geq \frac{3m}{3m^2} \geq \frac{1}{m} \geq 0$$

quel que soit le naturel $m > 1$.
Comme la série de terme général $\dfrac{1}{m}$ ne converge pas, vu le critère de comparaison, on en déduit que la série donnée $\left(\text{de terme général } \dfrac{3m}{m^2+3} \right)$ ne converge pas non plus.
(b) La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ est convergente car c'est, au premier terme près, la valeur de la fonction exponentielle en -1. La somme de cette série vaut donc $\exp(-1) - 1 = \frac{1}{e} - 1$.

(c) La série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} 3^{2-\frac{n}{2}}$ peut aussi s'écrire sous la forme $9 \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n$, série géométrique convergente puisque la raison $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \in]-1, 1[$. La somme de cette série vaut

$$9. \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 . \ \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{3}{2}\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = \frac{3}{2}(3+\sqrt{3}).$$

6. **(a) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_0$. Factoriser le déterminant de la matrice**

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$$

et en déduire que celui-ci est nul si et seulement si $a = b$ ou $a = c$ ou $b = c$.

Solution. (a) Par les règles de calcul élémentaires (mise en évidence, remplacement des colonnes 2 et 3 par leur soustraction avec la première) et par définition du calcul d'un déterminant, on a

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix} = abc \ \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix}$$

$$= abc\,(b-a)(c-a)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{pmatrix} = abc\,(b-a)(c-a)(c-b).$$

Ce déterminant est donc nul si et seulement si $a = b$ ou $a = c$ ou $b = c$.

(b) **Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer les valeurs propres de cette matrice.

Solution. Les valeurs propres de A sont les solutions de

$$\det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & \alpha-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

qui est une équation polynomiale (de degré 3) en l'inconnue λ.
En remplaçant la première ligne par la somme des trois, en mettant $(\alpha - 2 - \lambda)$ en évidence puis en ajoutant la troisième ligne à la première, on a

$$\det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & \alpha-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \alpha-2-\lambda & \alpha-2-\lambda & \alpha-2-\lambda \\ -1 & \alpha-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha-2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} = (\alpha-2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1+\alpha-\lambda \\ -1 & \alpha-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha-2-\lambda)(1+\alpha-\lambda)^2.$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont $\alpha - 2$ (simple) et $\alpha + 1$ (double).

(2) Si c'est possible, déterminer une matrice inversible qui transforme A en une matrice diagonale et donner l'expression de cette matrice diagonale.

Solution. Pour que la matrice soit diagonalisable, il faut trouver trois vecteurs propres linéairement indépendants associés à ces valeurs propres.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre double $\alpha+1$ sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$(A-(\alpha+1)I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+y+z=0$$

$$\Leftrightarrow x = -y-z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\alpha + 1$ sont donc les vecteurs du type

$$c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } c_1 \text{ et } c_2 \text{ sont des complexes non nuls simultanément.}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre simple $\alpha-2$ sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$(A-(\alpha-2)I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 3z = 0 \\ x = 2y - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\alpha - 2$ sont donc les vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

Puisqu'il est possible de trouver trois vecteurs propres linéairement indépendants, la matrice A est diagonalisable. Une matrice inversible possible est donnée par

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et est telle que} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-2 \end{pmatrix}.$$