Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Questionnaire et Corrigé
Examen de mathématiques générales B du 16 août 2016
biologistes

Version 28 juin 2016

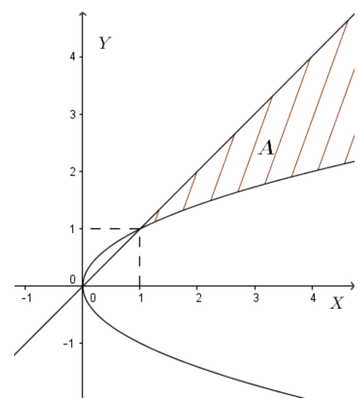
QUESTIONNAIRE

1. On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \text{arctg}\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$.

   (a) Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable.
   (b) En simplifiant au maximum, calculer $D_xD_yf(x,y)$ et $D_yD_xf(x,y)$ et comparer les résultats obtenus.

2. On donne la fonction f par
$$f(x) = \frac{1}{1+2x},\ x \neq \frac{-1}{2}.$$
   (a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0.
   (b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations en application du développement limité de Taylor.
   (c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0.

3. On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{y}{x^4}$ (l'une des courbes délimitant l'ensemble A est une droite et l'autre une parabole).
   Si c'est possible, calculer
$$I = \int\int_A f(x,y)\ dx\ dy.$$
   en justifiant vos démarche et réponse.



4. On donne l'ensemble
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \leq 0\ \ ,\ y \leq 0 \text{ et } 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\right\}$$
   et la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.
   Si c'est possible, calculer
$$I = \int\int_A f(x,y)\ dx\ dy$$
   en justifiant vos démarche et réponse.

5. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Déterminer les valeurs propres de cette matrice.
   (b) Si c'est possible, déterminer une matrice inversible qui transforme A en une matrice diagonale et donner l'expression de cette matrice diagonale.

CORRIGÉ

Exercices

1. **On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \mathrm{arctg}\left(\frac{x^2}{y}\right)$.**

   (a) Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable.

   Solution. La fonction f est deux fois dérivable sur l'ensemble A décrit par

   $$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\right\}.$$

   (b) En simplifiant au maximum, calculer $D_x D_y f(x,y)$ et $D_y D_x f(x,y)$ et comparer les résultats obtenus.

   Solution. En un point de A, on a

   $$D_y f(x,y) = D_y\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{x^2}{y}\right)\right) = \frac{1}{1+\frac{x^4}{y^2}}.\frac{-x^2}{y2} = \frac{-x^2}{y^2+x^4}.$$

   Par conséquent, en un point de A, l'expression $D_x D_y f(x,y)$ vaut

   $$D_x\left(\frac{-x^2}{y^2+x^4}\right) = \frac{-2x(y^2+x^4)+x^2.4x^3}{(y^2+x^4)^2} = \frac{2x(x^4-y^2)}{(y^2+x^4)^2}.$$

   En un point de A, on a

   $$D_x f(x,y) = D_x\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{x^2}{y}\right)\right) = \frac{1}{1+\frac{x^4}{y^2}}.\frac{2x}{y} = \frac{2xy}{y^2+x^4}.$$

   Par conséquent, en un point de A, l'expression $D_y D_x f(x,y)$ vaut

   $$D_y\left(\frac{2xy}{y^2+x^4}\right) = \frac{2x(y^2+x^4)-4xy^2}{(y^2+x^4)^2} = \frac{2x(x^4-y^2)}{(y^2+x^4)^2}.$$

   Ces deux expressions sont donc identiques.

2. **On donne la fonction f par**

   $$f(x) = \frac{1}{1+2x},\ x \neq \frac{-1}{2}.$$

   (a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0**.**

   Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-1}{2}\}$ et on a

   $$Df(x) = \frac{-2}{(1+2x)^2}, \quad D^2 f(x) = \frac{8}{(1+2x)^3} \quad et \quad D^3 f(x) = \frac{-48}{(1+2x)^4}.$$

   Comme $f(0)=1,\ Df(0)=-2$ et $D^2 f(0) = 8$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

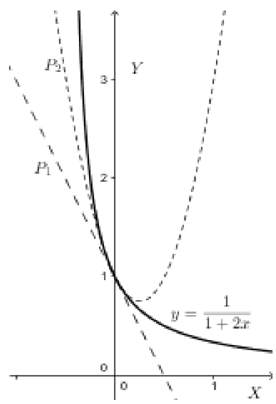
   $$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 1-2x, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2 f(0)}{2!}x^2 = 1-2x+4x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations en application du développement limité de Taylor.

Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, il existe u_1, u_2 strictement compris entre 0 et x tels que

$$R_1(x) = \frac{8}{(1+2u_1)^3}.\frac{x^2}{2!} = \frac{4x^2}{(1+2u_1)^3}, \quad R_2(x) = \frac{-48}{(1+2u_2)^4}.\frac{x^3}{3!} = \frac{-8x^3}{(1+2u_2)^4}.$$

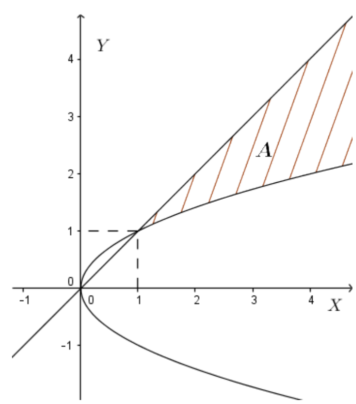
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0.
Solution.



3. **On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{y}{x^4}$ (l'une des courbes délimitant l'ensemble A est une droite et l'autre une parabole).**
Si c'est possible, calculer

$$I = \int\int_A f(x, y)\ dx\ dy.$$

en justifiant vos démarche et réponse.



Solution. Puisque ces courbes passent toutes les deux par les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(1, 1)$, la droite a pour équation $y = x$ et la parabole $x = y^2$. L'ensemble d'intégration A est donc décrit par $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, +\infty[,\ x \in [y, y^2]\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, +\infty[,\ y \in [\sqrt{x}, x]\}$. Comme la fonction f est continue sur $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\right\}$, elle est continue sur A, non fermé borné. Elle y est aussi positive.

Etudions l'intégrabilité de f sur A.
Pour x fixé dans $[1, +\infty[$, la fonction $h : y \mapsto \frac{y}{x^4}$ est continue et positive sur $[\sqrt{x}, x]$, fermé borné. Elle y est donc intégrable. On a

$$\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{y}{x^4}\ dy = \frac{1}{x^4}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{x}}^{x} = \frac{x^2 - x}{2x^4} = \frac{x-1}{2x^3}.$$

Considérons $g : x \mapsto \dfrac{x-1}{2x^3}$, fonction continue et positive sur l'intervalle non borné $[1, +\infty[$. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme g est continu sur $[1,t]$ $\forall t>1$, on a

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{x-1}{2x^3}\ dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x^3}\right)\ dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{-1}{2x}+\frac{1}{4x^2}\right]_1^t = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Vu que cette limite est finie, g est intégrable en $+\infty$ donc sur $[1,+\infty[$ et l'intégrale de g sur cet ensemble vaut $\frac{1}{4}$.

Dès lors, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on a $I=\frac{1}{4}$.

4. **On donne l'ensemble**

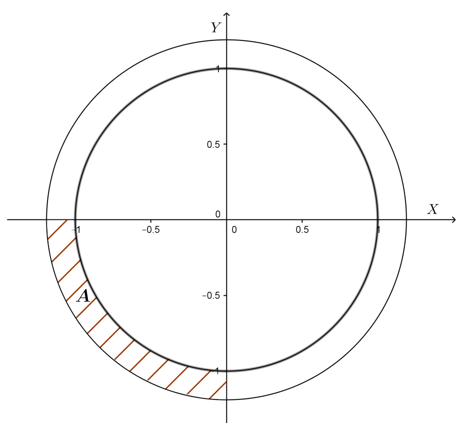
$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\le 0\ \ ,\ y\le 0 \text{ et } 1\le x^2+y^2\le 2\right\}$$

et la fonction $f:(x,y)\mapsto \frac{x^2}{x^2+y^2}$**.**
Si c'est possible, calculer

$$I=\int\int_A f(x,y)\ dx\ dy$$

en justifiant vos démarche et réponse.

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration A ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



La fonction $f:(x,y)\mapsto \frac{x^2}{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ donc sur A, ensemble borné fermé. Dès lors, la fonction est intégrable sur A.
Utilisons les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale demandée. Les rayons des deux cercles étant égaux à 1 et $\sqrt{2}$, l'ensemble d'intégration décrit en coordonnées polaires est

$$A'=\left\{(r,\theta): r\in[1,\sqrt{2}],\ \theta\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\right\}.$$

La fonction à intégrer est la fonction

$$g:(r,\theta)\mapsto f(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta))=\frac{r^2\cos^2(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}=\frac{r^2\cos^2(\theta)}{r^2}=\cos^2(\theta)$$

multipliée par le jacobien égal à r. Par application du théorème d'intégration par changement de variables, l'intégrale demandée est donc égale à

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} r \ \cos^2(\theta) \ d\theta \right) \ dr &= \int_1^{\sqrt{2}} r \ dr \ . \ \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \ d\theta \\
&= \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^{\sqrt{2}} \ . \ \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2} \right) . \frac{1}{2} . \left(\frac{3\pi}{2} - \pi \right) \\
&= \frac{1}{4} . \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

5. **Soit la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les valeurs propres de cette matrice.

Solution. Les valeurs propres de A sont les solutions de

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

qui est une équation polynomiale (de degré 3) en l'inconnue λ.
En remplaçant la première ligne par la somme des trois, en mettant $(-\lambda)$ en évidence puis en retirant la troisième ligne de la première, on a

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -\lambda & -\lambda \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3+\lambda \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda(3+\lambda)(1+2+\lambda) = -\lambda(3+\lambda)^2.$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont 0 (simple) et -3 (double).

(b) Si c'est possible, déterminer une matrice inversible qui transforme A en une matrice diagonale et donner l'expression de cette matrice diagonale.

Solution. Pour que la matrice soit diagonalisable, il faut trouver trois vecteurs propres linéairement indépendants associés à ces valeurs propres.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre double -3 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$(A+3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+y+z=0$$

$$\Leftrightarrow x = -y-z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -3 sont donc les vecteurs du type

$$c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } c_1 \text{ et } c_2 \text{ sont des complexes non nuls simultanément.}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre simple 0 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ x = 2y - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

Puisqu'il est possible de trouver trois vecteurs propres linéairement indépendants, la matrice A est diagonalisable. Une matrice inversible possible est donnée par

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et est telle que} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Questionnaire et Corrigé
Examen de mathématiques générales B du 16 août 2016
chimistes et géologues

Version 28 juin 2016

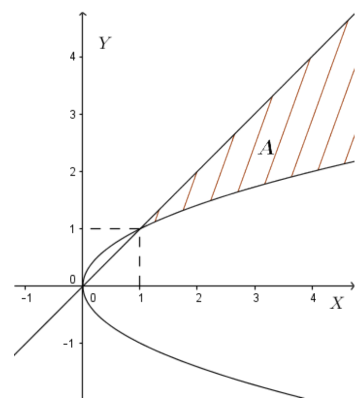
QUESTIONNAIRE

1. On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \text{arctg}\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$.

   (a) Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable.
   (b) En simplifiant au maximum, calculer $D_xD_yf(x,y)$ et $D_yD_xf(x,y)$ et comparer les résultats obtenus.

2. On donne la fonction f par
$$f(x) = \frac{1}{1+2x},\ x \neq \frac{-1}{2}.$$
   (a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0.
   (b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations en application du développement limité de Taylor.
   (c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0.

3. On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{y}{x^4}$ (l'une des courbes délimitant l'ensemble A est une droite et l'autre une parabole).
   Si c'est possible, calculer
$$I = \int\int_A f(x,y)\ dx\ dy.$$
   en justifiant vos démarche et réponse.



4. On donne l'ensemble
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \leq 0\ \ ,\ y \leq 0 \text{ et } 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\right\}$$
   et la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.
   Si c'est possible, calculer
$$I = \int\int_A f(x,y)\ dx\ dy$$
   en justifiant vos démarche et réponse.

5. Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme
$$(a)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2m}{m^2+2}, \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\ , \qquad (c)\ \sum_{n=3}^{+\infty} 5^{1-\frac{n}{2}}.$$

6. (a) Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$. Factoriser le déterminant de la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$$
   et en déduire que celui-ci est nul si et seulement si $a=b$ ou $a=c$ ou $b=c$.

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer les valeurs propres de cette matrice.

(2) Si c'est possible, déterminer une matrice inversible qui transforme A en une matrice diagonale et donner l'expression de cette matrice diagonale.

CORRIGÉ

Exercices

1. **On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y}\right)$.**

(a) Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable.

Solution. La fonction f est deux fois dérivable sur l'ensemble A décrit par

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\right\}.$$

(b) En simplifiant au maximum, calculer $D_xD_yf(x,y)$ et $D_yD_xf(x,y)$ et comparer les résultats obtenus.

Solution. En un point de A, on a

$$D_yf(x,y) = D_y\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y}\right)\right) = \frac{1}{1+\frac{x^4}{y^2}}.\frac{-x^2}{y2} = \frac{-x^2}{y^2+x^4}.$$

Par conséquent, en un point de A, l'expression $D_xD_yf(x,y)$ vaut

$$D_x\left(\frac{-x^2}{y^2+x^4}\right) = \frac{-2x(y^2+x^4)+x^2.4x^3}{(y^2+x^4)^2} = \frac{2x(x^4-y^2)}{(y^2+x^4)^2}.$$

En un point de A, on a

$$D_xf(x,y) = D_x\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y}\right)\right) = \frac{1}{1+\frac{x^4}{y^2}}.\frac{2x}{y} = \frac{2xy}{y^2+x^4}.$$

Par conséquent, en un point de A, l'expression $D_yD_xf(x,y)$ vaut

$$D_y\left(\frac{2xy}{y^2+x^4}\right) = \frac{2x(y^2+x^4)-4xy^2}{(y^2+x^4)^2} = \frac{2x(x^4-y^2)}{(y^2+x^4)^2}.$$

Ces deux expressions sont donc identiques.

2. **On donne la fonction f par**

$$f(x) = \frac{1}{1+2x}, \quad x \neq \frac{-1}{2}.$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0**.**

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-1}{2}\}$ et on a

$$Df(x) = \frac{-2}{(1+2x)^2}, \quad D^2f(x) = \frac{8}{(1+2x)^3} \quad et \quad D^3f(x) = \frac{-48}{(1+2x)^4}.$$

Comme $f(0) = 1$, $Df(0) = -2$ et $D^2f(0) = 8$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

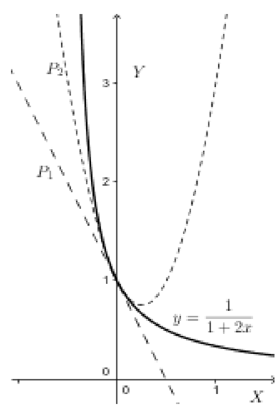
$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 1 - 2x, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1 - 2x + 4x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations en application du développement limité de Taylor.

Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, il existe u_1, u_2 strictement compris entre 0 et x tels que

$$R_1(x) = \frac{8}{(1+2u_1)^3}.\frac{x^2}{2!} = \frac{4x^2}{(1+2u_1)^3}, \quad R_2(x) = \frac{-48}{(1+2u_2)^4}.\frac{x^3}{3!} = \frac{-8x^3}{(1+2u_2)^4}.$$

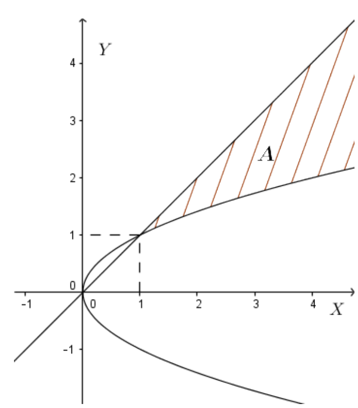
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0.
Solution.



3. **On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{y}{x^4}$ (l'une des courbes délimitant l'ensemble A est une droite et l'autre une parabole).**
Si c'est possible, calculer

$$I = \int\int_A f(x, y)\ dx\ dy.$$

en justifiant vos démarche et réponse.



Solution. Puisque ces courbes passent toutes les deux par les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(1, 1)$, la droite a pour équation $y = x$ et la parabole $x = y^2$. L'ensemble d'intégration A est donc décrit par $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, +\infty[,\ x \in [y, y^2]\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, +\infty[,\ y \in [\sqrt{x}, x]\}$. Comme la fonction f est continue sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, elle est continue sur A, non fermé borné. Elle y est aussi positive.

Etudions l'intégrabilité de f sur A.
Pour x fixé dans $[1, +\infty[$, la fonction $h : y \mapsto \frac{y}{x^4}$ est continue et positive sur $[\sqrt{x}, x]$, fermé borné.

Elle y est donc intégrable. On a

$$\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{y}{x^4}\ dy = \frac{1}{x^4}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{x}}^{x} = \frac{x^2-x}{2x^4} = \frac{x-1}{2x^3}.$$

Considérons $g : x \mapsto \dfrac{x-1}{2x^3}$, fonction continue et positive sur l'intervalle non borné $[1,+\infty[$. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme g est continu sur $[1,t]$ $\forall t > 1$, on a

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{x-1}{2x^3}\ dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x^3}\right)\ dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{-1}{2x}+\frac{1}{4x^2}\right]_1^t = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Vu que cette limite est finie, g est intégrable en $+\infty$ donc sur $[1,+\infty[$ et l'intégrale de g sur cet ensemble vaut $\dfrac{1}{4}$.

Dès lors, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on a $I = \dfrac{1}{4}$.

4. **On donne l'ensemble**

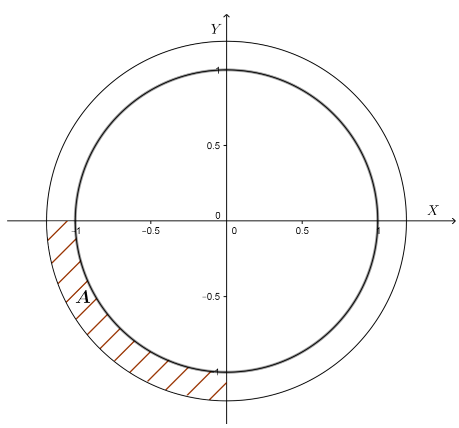
$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\le 0\ \ ,\ y\le 0 \text{ et } 1\le x^2+y^2\le 2\right\}$$

et la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$**.**
Si c'est possible, calculer

$$I = \int\int_A f(x,y)\ dx\ dy$$

en justifiant vos démarche et réponse.

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration A ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ donc sur A, ensemble borné fermé. Dès lors, la fonction est intégrable sur A.
Utilisons les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale demandée. Les rayons des deux cercles étant égaux à 1 et $\sqrt{2}$, l'ensemble d'intégration décrit en coordonnées polaires est

$$A' = \left\{(r,\theta) : r\in[1,\sqrt{2}],\ \theta\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\right\}.$$

La fonction à intégrer est la fonction

$$g : (r,\theta)\mapsto f(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta)) = \frac{r^2\cos^2(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)} = \frac{r^2\cos^2(\theta)}{r^2} = \cos^2(\theta)$$

multipliée par le jacobien égal à r. Par application du théorème d'intégration par changement de variables, l'intégrale demandée est donc égale à

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} r \ \cos^2(\theta) \ d\theta \right) \ dr &= \int_1^{\sqrt{2}} r \ dr \ . \ \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \ d\theta \\
&= \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^{\sqrt{2}} . \ \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2} \right) . \frac{1}{2} . \left(\frac{3\pi}{2} - \pi \right) \\
&= \frac{1}{4} . \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

5. **Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme**

$$(a) \ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2m}{m^2+2}, \qquad (b) \ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \ , \qquad (c) \ \sum_{n=3}^{+\infty} 5^{1-\frac{n}{2}}.$$

Solution. (a) On a

$$\frac{2m}{m^2+2} \geq \frac{2m}{2m^2} \geq \frac{1}{m} \geq 0$$

quel que soit le naturel $m > 1$.
Comme la série de terme général $\frac{1}{m}$ ne converge pas, vu le critère de comparaison, on en déduit que la série donnée $\left(\text{de terme général } \frac{2m}{m^2+2}\right)$ ne converge pas non plus.

(b) La série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ est convergente car c'est, au premier terme près, la valeur de la fonction exponentielle en 1. La somme de cette série vaut donc $exp(1) - 1 = e - 1$.

(c) La série $\sum_{n=3}^{+\infty} 5^{1-\dfrac{n}{2}}$ peut aussi s'écrire sous la forme $5 \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^n$, série géométrique convergente puisque la raison $\frac{1}{\sqrt{5}} \in]-1, 1[$. La somme de cette série vaut

$$5. \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^3 . \ \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

6. **(a) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Factoriser le déterminant de la matrice**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$$

et en déduire que celui-ci est nul si et seulement si $a = b$ ou $a = c$ ou $b = c$.

Solution. (a) Par les règles de calcul élémentaires (remplacement des colonnes 2 et 3 par leur soustraction avec la première), par la propriété de linéarité d'un déterminant et par définition, on a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a-b & a-c \\ c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix} = (a-b)(a-c) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & b \end{pmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c).$$

Ce déterminant est donc nul si et seulement si $a = b$ ou $a = c$ ou $b = c$.

(b) **Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer les valeurs propres de cette matrice.

Solution. Les valeurs propres de A sont les solutions de

$$\det \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \alpha-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

qui est une équation polynomiale (de degré 3) en l'inconnue λ.
En remplaçant la première ligne par la somme des trois, en mettant $(\alpha + 2 - \lambda)$ en évidence puis en retirant la troisième ligne de la première, on a

$$\det \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \alpha-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha+2-\lambda & \alpha+2-\lambda & \alpha+2-\lambda \\ 1 & \alpha-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha+2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} = (\alpha+2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-\alpha+\lambda \\ 1 & \alpha-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha+2-\lambda)(1-\alpha+\lambda)^2.$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont $\alpha + 2$ (simple) et $\alpha - 1$ (double).

(2) Si c'est possible, déterminer une matrice inversible qui transforme A en une matrice diagonale et donner l'expression de cette matrice diagonale.

Solution. Pour que la matrice soit diagonalisable, il faut trouver trois vecteurs propres linéairement indépendants associés à ces valeurs propres.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre double $\alpha - 1$ sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$(A - (\alpha-1)I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -y - z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\alpha - 1$ sont donc les vecteurs du type

$$c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } c_1 \text{ et } c_2 \text{ sont des complexes non nuls simultanément.}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre simple $\alpha+2$ sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$(A-(\alpha+2)I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y-z=0 \\ x=2y-z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=z \\ x=z \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\alpha+2$ sont donc les vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

Puisqu'il est possible de trouver trois vecteurs propres linéairement indépendants, la matrice A est diagonalisable. Une matrice inversible possible est donnée par

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et est telle que} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+2 \end{pmatrix}.$$

1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2015-2016

Questionnaire et Corrigé
Examen de mathématiques générales B du 16 août 2016
physiciens

Version 28 juin 2016

QUESTIONNAIRE

1. On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$.

   (a) Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable.

   (b) En simplifiant au maximum, calculer $D_x D_y f(x,y)$ et $D_y D_x f(x,y)$ et comparer les résultats obtenus.

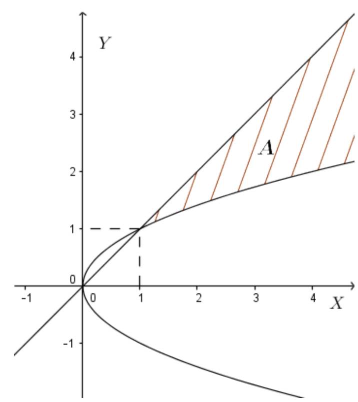
2. On donne la fonction f par
$$f(x) = \frac{1}{1+2x},\ x \neq \frac{-1}{2}.$$

   (a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0.

   (b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations en application du développement limité de Taylor.

   (c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0.

3. On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{y}{x^4}$ (l'une des courbes délimitant l'ensemble A est une droite et l'autre une parabole).
Si c'est possible, calculer
$$I = \int\int_A f(x,y)\ dx\ dy.$$
en justifiant vos démarche et réponse.



4. On donne l'ensemble
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \leq 0\ \ ,\ y \leq 0 \text{ et } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\right\}$$
et la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.
Si c'est possible, calculer
$$I = \int\int_A f(x,y)\ dx\ dy$$
en justifiant vos démarche et réponse.

5. Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme
$$(a)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2m}{m^2+2}, \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\ , \qquad (c)\ \sum_{n=3}^{+\infty} 5^{1-\frac{n}{2}}.$$

6. (a) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Factoriser le déterminant de la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$$
et en déduire que celui-ci est nul si et seulement si $a = b$ ou $a = c$ ou $b = c$.

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer les valeurs propres de cette matrice.
(2) Si c'est possible, déterminer une matrice inversible qui transforme A en une matrice diagonale et donner l'expression de cette matrice diagonale.

7. MATH B'

(a) Dans un repère orthonormé du plan, on donne l'ellipse d'équation cartésienne

$$x^2 + 16y^2 = 16.$$

Si $\mathcal{C}$ désigne la partie de cette courbe qui se trouve dans le quatrième quadrant, calculer les intégrales suivantes

$$(1) \int_{\mathcal{C}} xy\ ds, \qquad (2) \int_{\mathcal{C}} xy\ dx, \qquad (3) \int_{\mathcal{C}} xy\ dy.$$

(b) Déterminer explicitement f et I, intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, tels que $f \in C_1(I)$, $f(0) = 1$ et f est solution de l'équation différentielle

$$(1 + x^2)Df(x) - 2xf(x) = 0.$$

CORRIGÉ

Exercices

1. **On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y}\right)$.**

   (a) Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable.

   Solution. La fonction f est deux fois dérivable sur l'ensemble A décrit par

   $$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\right\}.$$

   (b) En simplifiant au maximum, calculer $D_x D_y f(x,y)$ et $D_y D_x f(x,y)$ et comparer les résultats obtenus.

   Solution. En un point de A, on a

   $$D_y f(x,y) = D_y\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y}\right)\right) = \frac{1}{1+\frac{x^4}{y^2}}.\frac{-x^2}{y2} = \frac{-x^2}{y^2+x^4}.$$

   Par conséquent, en un point de A, l'expression $D_x D_y f(x,y)$ vaut

   $$D_x\left(\frac{-x^2}{y^2+x^4}\right) = \frac{-2x(y^2+x^4)+x^2.4x^3}{(y^2+x^4)^2} = \frac{2x(x^4-y^2)}{(y^2+x^4)^2}.$$

   En un point de A, on a

   $$D_x f(x,y) = D_x\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y}\right)\right) = \frac{1}{1+\frac{x^4}{y^2}}.\frac{2x}{y} = \frac{2xy}{y^2+x^4}.$$

   Par conséquent, en un point de A, l'expression $D_y D_x f(x,y)$ vaut

   $$D_y\left(\frac{2xy}{y^2+x^4}\right) = \frac{2x(y^2+x^4)-4xy^2}{(y^2+x^4)^2} = \frac{2x(x^4-y^2)}{(y^2+x^4)^2}.$$

   Ces deux expressions sont donc identiques.

2. **On donne la fonction f par**

   $$f(x) = \frac{1}{1+2x},\ x \neq \frac{-1}{2}.$$

   (a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0**.**

   Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-1}{2}\}$ et on a

   $$Df(x) = \frac{-2}{(1+2x)^2}, \quad D^2f(x) = \frac{8}{(1+2x)^3} \quad et \quad D^3f(x) = \frac{-48}{(1+2x)^4}.$$

   Comme $f(0) = 1,\ Df(0) = -2$ et $D^2f(0) = 8$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

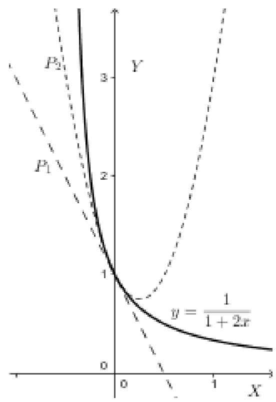
   $$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 1-2x, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1-2x+4x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations en application du développement limité de Taylor.

Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, il existe u_1, u_2 strictement compris entre 0 et x tels que

$$R_1(x) = \frac{8}{(1+2u_1)^3} \cdot \frac{x^2}{2!} = \frac{4x^2}{(1+2u_1)^3}, \quad R_2(x) = \frac{-48}{(1+2u_2)^4} \cdot \frac{x^3}{3!} = \frac{-8x^3}{(1+2u_2)^4}.$$

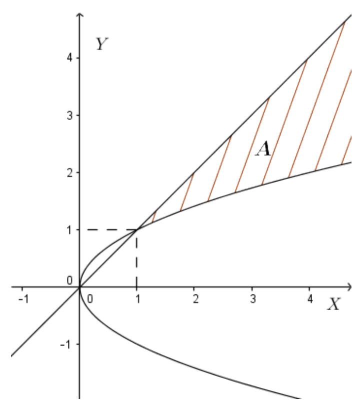
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0.
Solution.



3. **On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{y}{x^4}$ (l'une des courbes délimitant l'ensemble A est une droite et l'autre une parabole).**
Si c'est possible, calculer

$$I = \int\int_A f(x, y) \; dx \; dy.$$

en justifiant vos démarche et réponse.



Solution. Puisque ces courbes passent toutes les deux par les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(1, 1)$, la droite a pour équation $y = x$ et la parabole $x = y^2$. L'ensemble d'intégration A est donc décrit par $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, +\infty[, \; x \in [y, y^2]\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, +\infty[, \; y \in [\sqrt{x}, x]\}$. Comme la fonction f est continue sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, elle est continue sur A, non fermé borné. Elle y est aussi positive.

Etudions l'intégrabilité de f sur A.
Pour x fixé dans $[1, +\infty[$, la fonction $h : y \mapsto \frac{y}{x^4}$ est continue et positive sur $[\sqrt{x}, x]$, fermé borné. Elle y est donc intégrable. On a

$$\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{y}{x^4} \; dy = \frac{1}{x^4} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{x}}^{x} = \frac{x^2 - x}{2x^4} = \frac{x-1}{2x^3}.$$

Considérons $g : x \mapsto \dfrac{x-1}{2x^3}$, fonction continue et positive sur l'intervalle non borné $[1, +\infty[$. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme g est continu sur $[1,t]$ $\forall t>1$, on a

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{x-1}{2x^3}\ dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x^3}\right)\ dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{-1}{2x}+\frac{1}{4x^2}\right]_1^t = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Vu que cette limite est finie, g est intégrable en $+\infty$ donc sur $[1,+\infty[$ et l'intégrale de g sur cet ensemble vaut $\dfrac{1}{4}$.

Dès lors, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on a $I=\dfrac{1}{4}$.

4. **On donne l'ensemble**

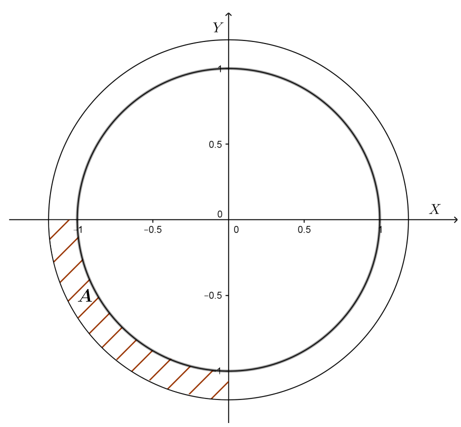
$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\le 0\ \ ,\ y\le 0 \text{ et } 1\le x^2+y^2\le 2\right\}$$

et la fonction $f:(x,y)\mapsto \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$**.**
Si c'est possible, calculer

$$I=\int\int_A f(x,y)\ dx\ dy$$

en justifiant vos démarche et réponse.

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration A ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



La fonction $f:(x,y)\mapsto \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ donc sur A, ensemble borné fermé. Dès lors, la fonction est intégrable sur A.
Utilisons les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale demandée. Les rayons des deux cercles étant égaux à 1 et $\sqrt{2}$, l'ensemble d'intégration décrit en coordonnées polaires est

$$A'=\left\{(r,\theta): r\in[1,\sqrt{2}],\ \theta\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\right\}.$$

La fonction à intégrer est la fonction

$$g:(r,\theta)\mapsto f(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta))=\frac{r^2\cos^2(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}=\frac{r^2\cos^2(\theta)}{r^2}=\cos^2(\theta)$$

multipliée par le jacobien égal à r. Par application du théorème d'intégration par changement de variables, l'intégrale demandée est donc égale à

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} r\ \cos^2(\theta)\ d\theta \right) dr &= \int_1^{\sqrt{2}} r\ dr\ .\ \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\ d\theta \\
&= \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right).\frac{1}{2}.\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right) \\
&= \frac{1}{4}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

5. **Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme**

$$(a)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2m}{m^2+2}, \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\ , \qquad (c)\ \sum_{n=3}^{+\infty} 5^{1-\frac{n}{2}}.$$

Solution. (a) On a

$$\frac{2m}{m^2+2} \geq \frac{2m}{2m^2} \geq \frac{1}{m} \geq 0$$

quel que soit le naturel $m > 1$.
Comme la série de terme général $\dfrac{1}{m}$ ne converge pas, vu le critère de comparaison, on en déduit que la série donnée $\left(\text{de terme général } \dfrac{2m}{m^2+2}\right)$ ne converge pas non plus.
(b) La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ est convergente car c'est, au premier terme près, la valeur de la fonction exponentielle en 1. La somme de cette série vaut donc $exp(1) - 1 = e - 1$.

(c) La série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} 5^{1-\dfrac{n}{2}}$ peut aussi s'écrire sous la forme $5\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n$, série géométrique convergente puisque la raison $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \in]-1,1[$. La somme de cette série vaut

$$5.\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

6. **(a) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Factoriser le déterminant de la matrice**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$$

et en déduire que celui-ci est nul si et seulement si $a = b$ ou $a = c$ ou $b = c$.

Solution. (a) Par les règles de calcul élémentaires (remplacement des colonnes 2 et 3 par leur soustraction avec la première), par la propriété de linéarité d'un déterminant et par définition, on a

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a-b & a-c \\ c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix} = (a-b)(a-c)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & b \end{pmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c).$$

Ce déterminant est donc nul si et seulement si $a = b$ ou $a = c$ ou $b = c$.

(b) **Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer les valeurs propres de cette matrice.

Solution. Les valeurs propres de A sont les solutions de

$$\det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \alpha-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

qui est une équation polynomiale (de degré 3) en l'inconnue λ.
En remplaçant la première ligne par la somme des trois, en mettant $(\alpha + 2 - \lambda)$ en évidence puis en retirant la troisième ligne de la première, on a

$$\det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \alpha-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \alpha+2-\lambda & \alpha+2-\lambda & \alpha+2-\lambda \\ 1 & \alpha-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha+2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} = (\alpha+2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-\alpha+\lambda \\ 1 & \alpha-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha+2-\lambda)(1-\alpha+\lambda)^2.$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont $\alpha + 2$ (simple) et $\alpha - 1$ (double).

(2) Si c'est possible, déterminer une matrice inversible qui transforme A en une matrice diagonale et donner l'expression de cette matrice diagonale.

Solution. Pour que la matrice soit diagonalisable, il faut trouver trois vecteurs propres linéairement indépendants associés à ces valeurs propres.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre double $\alpha - 1$ sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$(A - (\alpha-1)I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -y - z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\alpha - 1$ sont donc les vecteurs du type

$$c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } c_1 \text{ et } c_2 \text{ sont des complexes non nuls simultanément.}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre simple $\alpha+2$ sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$(A-(\alpha+2)I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ x=2y-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ x=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\alpha+2$ sont donc les vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

Puisqu'il est possible de trouver trois vecteurs propres linéairement indépendants, la matrice A est diagonalisable. Une matrice inversible possible est donnée par

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et est telle que} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+2 \end{pmatrix}.$$

7. **(a) Dans un repère orthonormé du plan, on donne l'ellipse d'équation cartésienne**

$$x^2 + 16y^2 = 16.$$

Si $\mathcal{C}$ désigne la partie de cette courbe qui se trouve dans le quatrième quadrant, calculer les intégrales suivantes

$$(1) \int_{\mathcal{C}} xy\ ds, \qquad (2) \int_{\mathcal{C}} xy\ dx, \qquad (3) \int_{\mathcal{C}} xy\ dy.$$

Solution. L'équation cartésienne de l'ellipse se réécrivant, sous forme canonique, $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + y^2 = 1$, un paramétrage (injectif) de la courbe $\mathcal{C}$ est donné par

$$\vec{\gamma}\ :\ t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \mapsto [4\cos(t),\ \sin(t)].$$

Ce paramétrage est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$D\vec{\gamma}(t) = [-4\sin(t),\ \cos(t)] \neq \vec{0} \quad \forall t \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[,$$

ce qui montre qu'il est régulier, et

$$\|D\vec{\gamma}(t)\| = \sqrt{16\sin^2(t)+\cos^2(t)} = \sqrt{1+15\sin^2(t)}.$$

(1) Comme l'intégrand $f : (x,y) \mapsto xy$ est continu sur la courbe $\mathcal{C}$, l'intégrale a un sens et on a

$$\int_{\mathcal{C}} xy\, ds = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 4\cos(t)\ \sin(t)\ \sqrt{1+15\sin^2(t)}\, dt = \frac{4}{30}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} D\left(1+15\sin^2(t)\right)\ \sqrt{1+15\sin^2(t)}\, dt$$

$$= \frac{4}{30}\left[\frac{2}{3}\left(1+15\sin^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = -\frac{28}{5}.$$

(2) Comme l'intégrand $f : (x, y) \mapsto xy$ est continu sur la courbe $\mathcal{C}$, l'intégrale a un sens et on a

$$\int_{\mathcal{C}} xy\, dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 4\cos(t)\sin(t)\,(-4\sin(t))\, dt = -16\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin^2(t)\cos(t)\, dt = -16\left[\frac{\sin^3(t)}{3}\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = -\frac{16}{3}.$$

(3) Comme l'intégrand $f : (x, y) \mapsto xy$ est continu sur la courbe $\mathcal{C}$, l'intégrale a un sens et on a

$$\int_{\mathcal{C}} xy\, dy = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 4\cos(t)\sin(t)\;\cos(t)\, dt = 4\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos^2(t)\sin(t)\, dt = 4\left[-\frac{1}{3}\cos^3(t)\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = -\frac{4}{3}.$$

(b) Déterminer explicitement f et I, intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, tels que $f \in C_1(I)$, $f(0) = 1$ et f est solution de l'équation différentielle

$$(1 + x^2)Df(x) - 2xf(x) = 0.$$

Solution. Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1, à second membre linéaire : elle se réécrit

$$Df(x) = a(x)\, f(x)$$

où $a : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est continu sur $\mathbb{R}$.
Dès lors, l'équation admet une solution sur $\mathbb{R}$ et, comme nous disposons d'une condition initiale en $0 \in \mathbb{R}$, nous pouvons en déterminer une solution unique sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.
Nous avons

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx \simeq \ln(1 + x^2), \qquad x \in I$$

Les solutions sur I sont donc les fonctions de la forme

$$f(x) = Ce^{A(x)} = C(1 + x^2), \qquad x \in I,$$

où C est une constante arbitraire. Comme $f(0) = 1$, on en déduit que $C = 1$ et que, par conséquent, la solution cherchée est

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad x \in I.$$