1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Questionnaire et Corrigé
Examen de mathématiques générales B du 25 mai 2016
biologistes

Version 14 mai 2016

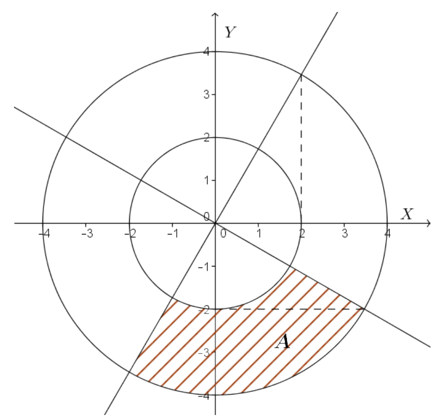
QUESTIONNAIRE

1. On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \arcsin(xy)$.
(a) Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter celui-ci en le hachurant.
(c) Simplifier au maximum l'expression $D_x D_y f(x,y)$.

2. On donne la fonction f par
$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ x \neq 1.$$
(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0.
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0.

3. On donne
$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y \frac{e^{x-y}}{1+x^2}\, dx \right) dy.$$
(a) Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
(b) Si possible, déterminer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.

4. On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2+y^2}{y^2}$. Si c'est possible, calculer
$$I = \int \int_A f(x,y)\, dx\, dy.$$



5. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$
(a) Déterminer les valeurs propres de cette matrice.
(b) Si c'est possible, déterminer une matrice inversible qui transforme A en une matrice diagonale et donner l'expression de cette matrice diagonale.

CORRIGÉ

Exercices

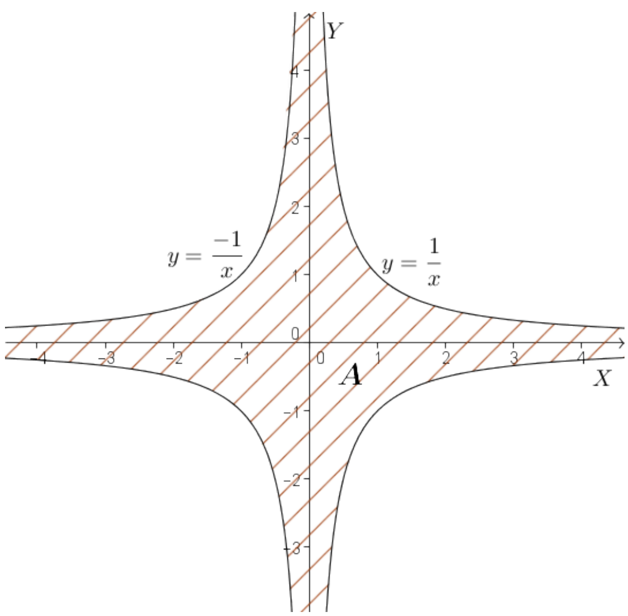
1. **On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \arcsin(xy)$.**
   (a) Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable.

   Solution. La fonction f est deux fois dérivable sur l'ensemble A décrit par

   $$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < xy < 1\right\}.$$

   (b) Dans un repère orthonormé, représenter celui-ci en le hachurant.

   Solution. Voici la représentation graphique de cet ensemble A (partie hachurée) : les points des hyperboles d'équation cartésienne $xy = 1$ et $xy = -1$ sont exclus de l'ensemble.



   (c) Simplifier au maximum l'expression $D_x D_y f(x,y)$.

   Solution. En un point de A, on a

   $$D_y f(x,y) = D_y\left(\arcsin(xy)\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}.$$

   Par conséquent, en un point de A, l'expression donnée vaut

$$D_x\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-x^2y^2} - x\dfrac{-2xy^2}{2\sqrt{1-x^2y^2}}}{1-x^2y^2} = \frac{1-x^2y^2+x^2y^2}{(1-x^2y^2)\sqrt{1-x^2y^2}} = \frac{1}{(1-x^2y^2)\sqrt{1-x^2y^2}}.$$

2. **On donne la fonction f par**

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \ x \neq 1.$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0.

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et on a

$$Df(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad D^2 f(x) = \frac{6}{(1-x)^4} \quad et \quad D^3 f(x) = \frac{24}{(1-x)^5}.$$

Comme $f(0) = 1, \ Df(0) = 2$ et $D^2 f(0) = 6$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

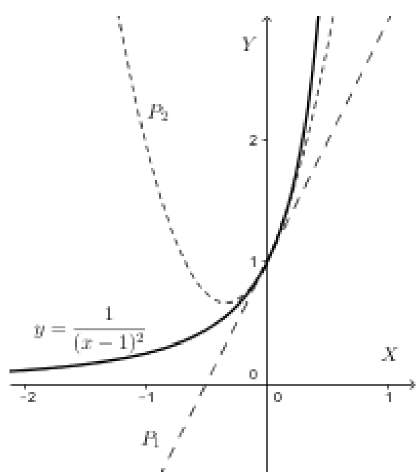
$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 1 + 2x, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2 f(0)}{2!} x^2 = 1 + 2x + 3x^2, \ x \in \mathbb{R}.$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.

Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in]-\infty, 1[$, il existe u_1, u_2 strictement compris entre 0 et x tels que

$$R_1(x) = \frac{6}{(1-u_1)^4} . \frac{x^2}{2!} = \frac{3x^2}{(1-u_1)^4}, \quad R_2(x) = \frac{24}{(1-u_2)^5} . \frac{x^3}{3!} = \frac{4x^3}{(1-u_2)^5}.$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0.
Solution.

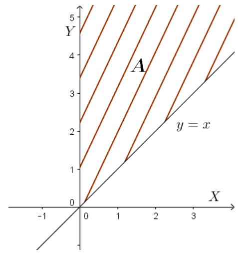


3. **On donne**

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y \frac{e^{x-y}}{1+x^2} \, dx \right) \, dy.$$

(a) Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration A ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



Comme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in [0,y]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[,\ y \in [x,+\infty[\}$, en permutant l'ordre d'intégration, on a

$$I' = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{x-y}}{1+x^2}\, dy \right) dx.$$

(b) Si possible, déterminer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.

Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{e^{x-y}}{1+x^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur A, ensemble non fermé borné.

Etudions l'intégrabilité de f sur A.
Pour x fixé dans $[0,+\infty[$, la fonction $h : y \mapsto \dfrac{e^x}{1+x^2}\, e^{-y}$ est continue et positive sur $[x,+\infty[$. Pour tout $t > x$, calculons $\lim\limits_{t\to+\infty} \displaystyle\int_x^t \frac{e^x}{1+x^2}\, e^{-y}\, dy$. Si cette limite est finie alors h sera intégrable en $+\infty$ donc sur $[x,+\infty[$ et la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale de h sur cet ensemble. On a

$$\lim_{t\to+\infty} \int_x^t \frac{e^x}{1+x^2}\, e^{-y}\, dy = -\frac{e^x}{1+x^2} \lim_{t\to+\infty} [e^{-y}]_x^t = -\frac{e^x}{1+x^2} \lim_{t\to+\infty} (e^{-t} - e^{-x}) = \frac{1}{1+x^2}$$

car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$. La limite étant finie, h est intégrable sur $[x,+\infty[$ et son intégrale sur cet ensemble vaut $\dfrac{1}{1+x^2}$.

Considérons $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, fonction continue et positive sur l'intervalle non borné $[0,+\infty[$. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme g est continu sur $[0,t]$ $\forall t > 0$, on a

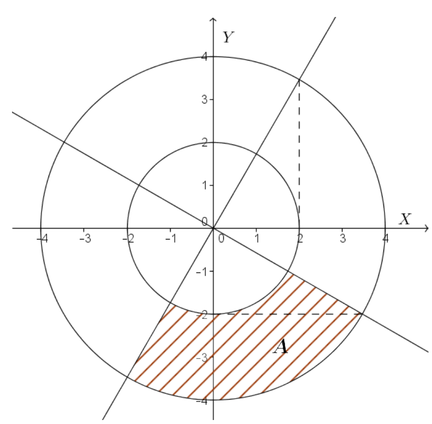
$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty} [\operatorname{arctg}(x)]_0^t = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg}(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Vu que cette limite est finie, g est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0,+\infty[$ et l'intégrale de g sur cet ensemble vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

Dès lors, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on a $I = I' = \dfrac{\pi}{2}$.

4. **On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2+y^2}{y^2}$. Si c'est possible, calculer**

$$I = \int\int_A f(x,y)\ dx\ dy.$$



Solution. La fonction $f:(x,y)\mapsto \dfrac{x^2+y^2}{y^2}$ est continue sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq 0\}$ donc sur A, ensemble borné fermé. Dès lors, la fonction est intégrable sur A.
Utilisons les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale demandée. Les abscisses et ordonnées des points d'intersection des cercles avec les droites intervenant dans les bords de A permettent de conclure que ces droites ont pour équation cartésienne $y=\sqrt{3}x$ ou encore $y=\operatorname{tg}(4\pi/3)x$ et $y=\frac{-\sqrt{3}}{3}x$ ou encore $y=\operatorname{tg}(11\pi/6)x$. Ainsi, l'ensemble d'intégration décrit en coordonnées polaires est

$$A'=\left\{(r,\theta) : r\in[2,4],\ \theta\in\left[\frac{4\pi}{3},\frac{11\pi}{6}\right]\right\}.$$

La fonction à intégrer est la fonction

$$g:(r,\theta)\mapsto f(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta))=\frac{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}{r^2\sin^2(\theta)}=\frac{r^2}{r^2\sin^2(\theta)}=\frac{1}{\sin^2(\theta)}$$

multipliée par le jacobien égal à r. Par application du théorème d'intégration par changement de variables, l'intégrale demandée est donc égale à

$$\begin{aligned}
\int_2^4\left(\int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{11\pi}{6}}\frac{r}{\sin^2(\theta)}\,d\theta\right)dr &= \int_2^4 r\ dr\ .\ \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{11\pi}{6}}\frac{1}{\sin^2(\theta)}\,d\theta\\
&= \left[\frac{r^2}{2}\right]_2^4\ .\ [-\operatorname{cotg}(\theta)]_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{11\pi}{6}}\\
&= \left(\frac{16-4}{2}\right)\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{4\pi}{3}\right)-\operatorname{cotg}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)\\
&= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}\right)\\
&= \frac{24\sqrt{3}}{3}=8\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

5. **Soit la matrice**

$$A=\begin{pmatrix}-2&2&0\\1&-2&1\\0&2&-2\end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les valeurs propres de cette matrice.

Solution. Les valeurs propres de A sont les solutions de

$$\det\begin{pmatrix}-2-\lambda&2&0\\1&-2-\lambda&1\\0&2&-2-\lambda\end{pmatrix}=0$$

qui est une équation polynomiale (de degré 3) en l'inconnue λ.
En remplaçant la première colonne par la somme des trois, en mettant $(-\lambda)$ en évidence puis en retirant de la première ligne la troisième, on a

$$\det\begin{pmatrix}-2-\lambda&2&0\\1&-2-\lambda&1\\0&2&-2-\lambda\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}-\lambda&2&0\\-\lambda&-2-\lambda&1\\-\lambda&2&-2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$=-\lambda\det\begin{pmatrix}1&2&0\\1&-2-\lambda&1\\1&2&-2-\lambda\end{pmatrix}=-\lambda\det\begin{pmatrix}0&0&2+\lambda\\1&-2-\lambda&1\\1&2&-2-\lambda\end{pmatrix}=-\lambda(2+\lambda)(4+\lambda)$$

Ainsi, les valeurs propres (simples) de A sont -4, -2 et 0.

(b) Si c'est possible, déterminer une matrice inversible qui transforme A en une matrice diagonale et donner l'expression de cette matrice diagonale.

Solution. Comme la matrice est de dimension trois et qu'elle possède trois valeurs propres simples, la matrice A est diagonalisable.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -4 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$(A+4I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ z = -y \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -y \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -4 sont donc les vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -2 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$(A+2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = -x \\ y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -2 sont donc les vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x + 2y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

La matrice A est donc diagonalisable et une matrice S inversible possible est donnée par

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et est telle que} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Questionnaire et Corrigé
Examen de mathématiques générales B du 25 mai 2016
chimistes, geologues et informaticiens

Version 14 mai 2016

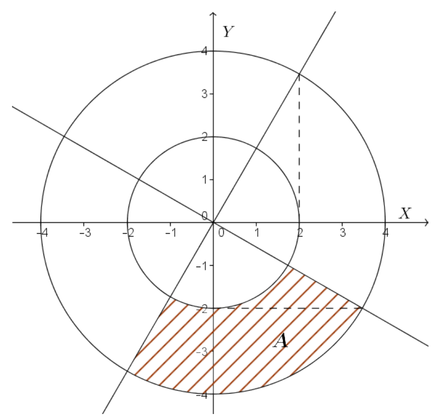
QUESTIONNAIRE

1. On donne explicitement la fonction f par $f(x, y) = \arcsin(xy)$.
(a) Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter celui-ci en le hachurant.
(c) Simplifier au maximum l'expression $D_x D_y f(x, y)$.

2. On donne la fonction f par
$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ x \neq 1.$$
(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0.
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0.

3. On donne
$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y \frac{e^{x-y}}{1+x^2}\ dx \right)\ dy.$$
(a) Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
(b) Si possible, déterminer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.

4. On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x^2 + y^2}{y^2}$. Si c'est possible, calculer
$$I = \int \int_A f(x, y)\ dx\ dy.$$



5. (a) La série suivante est-elle convergente ? Si la réponse est oui, en déterminer la somme
$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{1+j^2}.$$
(b) Depuis le sol, on lance une petite fusée. On note C la quantité de carburant (en litres) au départ. Tous les 1000 km, elle consomme une part (notée q) du carburant qui lui reste. Après M milliers de kilomètres (M est un naturel strictement positif), elle aura ainsi consommé
$$S_M = qC \sum_{m=0}^{M-1} (1-q)^m$$
litres. En supposant que $q \in]0, 1[$, et en sommant la série, si c'est possible, peut-on dire que la fusée aura assez de carburant ? Pourquoi ?

6. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Factoriser le déterminant de la matrice
$$\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ a+b & (a+b)^2 & (a+b)^3 \end{pmatrix}$$

et en déduire que celui-ci est nul si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$ ou $|a| = |b|$.

(b) Soient $\alpha, \beta > 0$ et soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \beta & -2\beta & \beta \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer les valeurs propres de cette matrice.
(2) Si c'est possible, déterminer une matrice inversible qui transforme A en une matrice diagonale et donner l'expression de cette matrice diagonale.

CORRIGÉ

Exercices

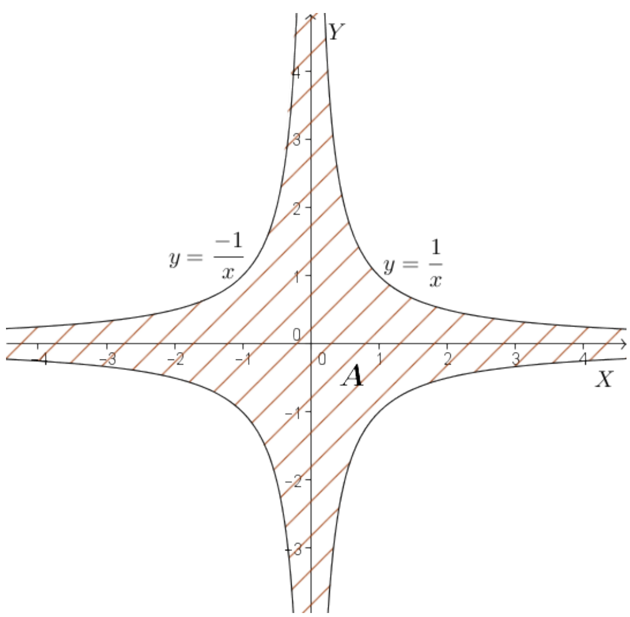
1. **On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \arcsin(xy)$.**
(a) Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable.

Solution. La fonction f est deux fois dérivable sur l'ensemble A décrit par

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < xy < 1\right\}.$$

(b) Dans un repère orthonormé, représenter celui-ci en le hachurant.

Solution. Voici la représentation graphique de cet ensemble A (partie hachurée) : les points des hyperboles d'équation cartésienne $xy = 1$ et $xy = -1$ sont exclus de l'ensemble.



(c) Simplifier au maximum l'expression $D_x D_y f(x,y)$.

Solution. En un point de A, on a

$$D_y f(x,y) = D_y\left(\arcsin(xy)\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}.$$

Par conséquent, en un point de A, l'expression donnée vaut

$$D_x\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-x^2y^2} - x\dfrac{-2xy^2}{2\sqrt{1-x^2y^2}}}{1-x^2y^2} = \frac{1-x^2y^2+x^2y^2}{(1-x^2y^2)\sqrt{1-x^2y^2}} = \frac{1}{(1-x^2y^2)\sqrt{1-x^2y^2}}.$$

2. **On donne la fonction f par**

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ x \neq 1.$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0.

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et on a

$$Df(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad D^2f(x) = \frac{6}{(1-x)^4} \quad et \quad D^3f(x) = \frac{24}{(1-x)^5}.$$

Comme $f(0) = 1,\ Df(0) = 2$ et $D^2f(0) = 6$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

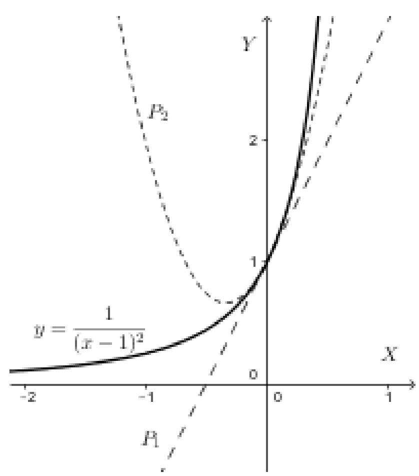
$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 1 + 2x, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1 + 2x + 3x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.

Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in]-\infty, 1[$, il existe u_1, u_2 strictement compris entre 0 et x tels que

$$R_1(x) = \frac{6}{(1-u_1)^4}.\frac{x^2}{2!} = \frac{3x^2}{(1-u_1)^4}, \quad R_2(x) = \frac{24}{(1-u_2)^5}.\frac{x^3}{3!} = \frac{4x^3}{(1-u_2)^5}.$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0.
Solution.

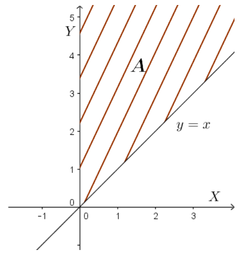


3. **On donne**

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y \frac{e^{x-y}}{1+x^2}\, dx \right)\, dy.$$

(a) Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration A ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



Comme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in [0,y]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[,\ y \in [x,+\infty[\}$, en permutant l'ordre d'intégration, on a

$$I' = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{x-y}}{1+x^2}\, dy \right) dx.$$

(b) Si possible, déterminer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.

Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{e^{x-y}}{1+x^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur A, ensemble non fermé borné.

Etudions l'intégrabilité de f sur A.
Pour x fixé dans $[0,+\infty[$, la fonction $h : y \mapsto \dfrac{e^x}{1+x^2}\, e^{-y}$ est continue et positive sur $[x,+\infty[$. Pour tout $t > x$, calculons $\lim\limits_{t\to+\infty} \displaystyle\int_x^t \frac{e^x}{1+x^2}\, e^{-y}\, dy$. Si cette limite est finie alors h sera intégrable en $+\infty$ donc sur $[x,+\infty[$ et la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale de h sur cet ensemble. On a

$$\lim_{t\to+\infty} \int_x^t \frac{e^x}{1+x^2}\, e^{-y}\, dy = -\frac{e^x}{1+x^2} \lim_{t\to+\infty} [e^{-y}]_x^t = -\frac{e^x}{1+x^2} \lim_{t\to+\infty} (e^{-t} - e^{-x}) = \frac{1}{1+x^2}$$

car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$. La limite étant finie, h est intégrable sur $[x,+\infty[$ et son intégrale sur cet ensemble vaut $\dfrac{1}{1+x^2}$.

Considérons $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, fonction continue et positive sur l'intervalle non borné $[0,+\infty[$. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme g est continu sur $[0,t]$ $\forall t > 0$, on a

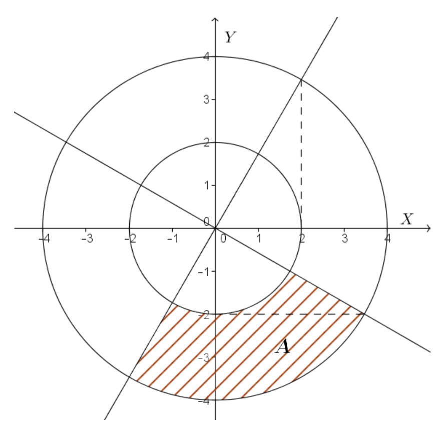
$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty} [\mathrm{arctg}(x)]_0^t = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{arctg}(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Vu que cette limite est finie, g est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0,+\infty[$ et l'intégrale de g sur cet ensemble vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

Dès lors, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on a $I = I' = \dfrac{\pi}{2}$.

4. **On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2+y^2}{y^2}$. Si c'est possible, calculer**

$$I = \int\int_A f(x,y)\, dx\, dy.$$



Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2+y^2}{y^2}$ est continue sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ donc sur A, ensemble borné fermé. Dès lors, la fonction est intégrable sur A.
Utilisons les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale demandée. Les abscisses et ordonnées des points d'intersection des cercles avec les droites intervenant dans les bords de A permettent de conclure que ces droites ont pour équation cartésienne $y = \sqrt{3}x$ ou encore $y = \mathrm{tg}(4\pi/3)x$ et $y = \frac{-\sqrt{3}}{3}x$ ou encore $y = \mathrm{tg}(11\pi/6)x$. Ainsi, l'ensemble d'intégration décrit en coordonnées polaires est

$$A' = \left\{(r,\theta) : r \in [2,4],\ \theta \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right]\right\}.$$

La fonction à intégrer est la fonction

$$g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta)) = \frac{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)}{r^2\sin^2(\theta)} = \frac{r^2}{r^2\sin^2(\theta)} = \frac{1}{\sin^2(\theta)}$$

multipliée par le jacobien égal à r. Par application du théorème d'intégration par changement de variables, l'intégrale demandée est donc égale à

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \left(\int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{11\pi}{6}} \frac{r}{\sin^2(\theta)}\, d\theta\right) dr &= \int_2^4 r\ dr\ .\ \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{11\pi}{6}} \frac{1}{\sin^2(\theta)}\, d\theta \\
&= \left[\frac{r^2}{2}\right]_2^4\ .\ [-\mathrm{cotg}(\theta)]_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{11\pi}{6}} \\
&= \left(\frac{16-4}{2}\right)\left(\mathrm{cotg}\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \mathrm{cotg}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) \\
&= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\right) \\
&= \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

5. **(a) La série suivante est-elle convergente ? Si la réponse est oui, en déterminer la somme**

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{1+j^2}.$$

Solution. On a

$$\frac{j}{1+j^2} \geq \frac{j}{2j^2} \geq \frac{1}{2j} \geq \frac{1}{2}.\frac{1}{j} \geq 0$$

quel que soit le naturel $j \geq 1$.
Comme la série de terme général $\dfrac{1}{j}$ ne converge pas, vu le critère de comparaison, on en déduit que la série donnée (de terme général $\dfrac{j}{1+j^2}$) ne converge pas non plus.

(b) Depuis le sol, on lance une petite fusée. On note C la quantité de carburant (en litres) au départ. Tous les 1000 km, elle consomme une part (notée q) du carburant qui lui reste. Après M milliers de kilomètres (M est un naturel strictement positif), elle aura ainsi consommé

$$S_M = qC\sum_{m=0}^{M-1}(1-q)^m$$

litres. En supposant que $q \in]0,1[$, et en sommant la série, si c'est possible, peut-on dire que la fusée aura assez de carburant ? Pourquoi ?

Solution. Comme $q \in]0,1[$, on a $1-q \in]0,1[$ et la série $\sum_{m=0}^{+\infty}(1-q)^m$ est une série géométrique convergente dont la somme vaut $\dfrac{1}{1-(1-q)} = \dfrac{1}{q}$.

Ainsi,

$$\lim_{M\to+\infty} S_M = qC\,\frac{1}{q} = C$$

ce qui montre que la fusée aura assez de carburant.

6. **(a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Factoriser le déterminant de la matrice**

$$\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ a+b & (a+b)^2 & (a+b)^3 \end{pmatrix}$$

et en déduire que celui-ci est nul si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$ ou $|a| = |b|$.

Solution. Par la propriété de linéarité d'un déterminant (mise en évidence de a dans la première ligne, de b dans la deuxième et de $(a+b)$ dans la troisième), ainsi que les règles de calcul élémentaires (remplacement des lignes 2 et 3 par leur soustraction avec la première) , on a

$$\det\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ a+b & (a+b)^2 & (a+b)^3 \end{pmatrix} = ab(a+b)\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & a+b & (a+b)^2 \end{pmatrix}$$

$$= ab(a+b)\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & b & 2ab+b^2 \end{pmatrix} = ab^2(a+b)(b-a)\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & 2a+b \end{pmatrix}$$

$$= ab^2(a+b)(b-a)(2a+b-b-a) = a^2b^2(a+b)(b-a).$$

Ce déterminant est donc nul si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$ ou $|a| = |b|$.

(b) **Soient $\alpha, \beta > 0$ et soit la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \beta & -2\beta & \beta \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer les valeurs propres de cette matrice.

Solution. Les valeurs propres de A sont les solutions de

$$\det\begin{pmatrix} -\alpha-\lambda & \alpha & 0 \\ \beta & -2\beta-\lambda & \beta \\ 0 & \alpha & -\alpha-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

qui est une équation polynomiale (de degré 3) en l'inconnue λ.
En remplaçant la première colonne par la somme des trois, en mettant $(-\lambda)$ en évidence puis en retirant de la première ligne la troisième, on a

$$\det\begin{pmatrix} -\alpha-\lambda & \alpha & 0 \\ \beta & -2\beta-\lambda & \beta \\ 0 & \alpha & -\alpha-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -\lambda & \alpha & 0 \\ -\lambda & -2\beta-\lambda & \beta \\ -\lambda & \alpha & -\alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda\det\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & -2\beta-\lambda & \beta \\ 1 & \alpha & -\alpha-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha+\lambda \\ 1 & -2\beta-\lambda & \beta \\ 1 & \alpha & -\alpha-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\alpha+\lambda)(\alpha+2\beta+\lambda)$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont 0, $-\alpha$ et $-\alpha-2\beta$.

(2) Si c'est possible, déterminer une matrice inversible qui transforme A en une matrice diagonale et donner l'expression de cette matrice diagonale.

Solution. Puisque $\alpha, \beta > 0$, les valeurs propres sont simples et la matrice est diagonalisable.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \beta & -2\beta & \beta \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha x + \alpha y = 0 \\ \beta x - 2\beta y + \beta z = 0 \\ \alpha y - \alpha z = 0 \end{cases}$$

Puisque $\alpha, \beta \neq 0$, le système s'écrit aussi

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ z - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $-\alpha$ sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$(A + \alpha I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta & -2\beta + \alpha & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha y = 0 \\ \beta x - (2\beta - \alpha)y + \beta z = 0 \\ \alpha y = 0 \end{cases}$$

Puisque $\alpha, \beta \neq 0$, le système s'écrit aussi

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $-\alpha$ sont donc les vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $(-\alpha - 2\beta)$ sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$(A + (\alpha + 2\beta)I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2\beta & \alpha & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \alpha & 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta x + \alpha y = 0 \\ \beta x + \alpha y + \beta z = 0 \\ \alpha y + 2\beta z = 0 \end{cases}$$

Puisque $\alpha, \beta \neq 0$, le système s'écrit aussi

$$\begin{cases} x = \dfrac{-\alpha}{2\beta} y \\ z = \dfrac{-\alpha}{2\beta} y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-\alpha}{2\beta} y \\ y \\ \dfrac{-\alpha}{2\beta} y \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $(-\alpha - 2\beta)$ sont donc les vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\beta \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

Dès lors, une matrice inversible possible est donnée par

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & -2\beta \\ 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et est telle que} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha - 2\beta \end{pmatrix}.$$

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Questionnaire et Corrigé
Examen de mathématiques générales B du 25 mai 2016
physiciens

Version 14 mai 2016

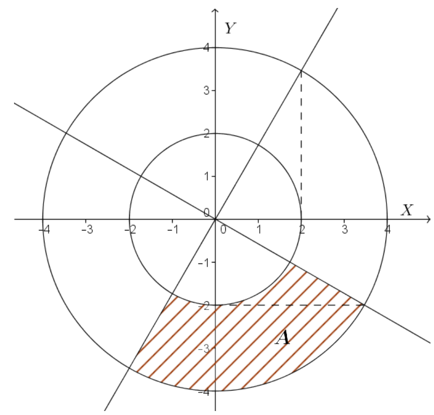
QUESTIONNAIRE

1. On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \arcsin(xy)$.
   (a) Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable.
   (b) Dans un repère orthonormé, représenter celui-ci en le hachurant.
   (c) Simplifier au maximum l'expression $D_x D_y f(x,y)$.

2. On donne la fonction f par
$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ x \neq 1.$$
   (a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0.
   (b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
   (c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0.

3. On donne
$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y \frac{e^{x-y}}{1+x^2}\, dx \right)\, dy.$$
   (a) Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
   (b) Si possible, déterminer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.

4. On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2+y^2}{y^2}$. Si c'est possible, calculer
$$I = \int\int_A f(x,y)\ dx\ dy.$$



5. (a) La série suivante est-elle convergente ? Si la réponse est oui, en déterminer la somme
$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{1+j^2}.$$
   (b) Depuis le sol, on lance une petite fusée. On note C la quantité de carburant (en litres) au départ. Tous les 1000 km, elle consomme une part (notée q) du carburant qui lui reste. Après M milliers de kilomètres (M est un naturel strictement positif), elle aura ainsi consommé
$$S_M = qC \sum_{m=0}^{M-1} (1-q)^m$$
   litres. En supposant que $q \in]0,1[$, et en sommant la série, si c'est possible, peut-on dire que la fusée aura assez de carburant ? Pourquoi ?

6. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Factoriser le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ a+b & (a+b)^2 & (a+b)^3 \end{pmatrix}$$

et en déduire que celui-ci est nul si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$ ou $|a| = |b|$.

(b) Soient $\alpha, \beta > 0$ et soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \beta & -2\beta & \beta \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer les valeurs propres de cette matrice.
(2) Si c'est possible, déterminer une matrice inversible qui transforme A en une matrice diagonale et donner l'expression de cette matrice diagonale.

7. MATH B'

(a) Dans un repère orthonormé du plan, on donne l'ellipse d'équation cartésienne

$$9x^2 + y^2 = 9.$$

Si $\mathcal{C}$ désigne la partie de cette courbe qui se trouve dans le second quadrant, calculer les intégrales suivantes

$$(1) \int_{\mathcal{C}} xy\ ds, \qquad (2) \int_{\mathcal{C}} y\ dy, \qquad (3) \int_{\mathcal{C}} x\ dy.$$

(b) Déterminer explicitement f et I, intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 1, tels que $f \in C_1(I)$, $f(x) \neq 0$ quel que soit $x \in I$, $f(1) = 1$ et f est solution de l'équation différentielle $Df(x) = \dfrac{f^2(x)}{x}$.

CORRIGÉ

Exercices

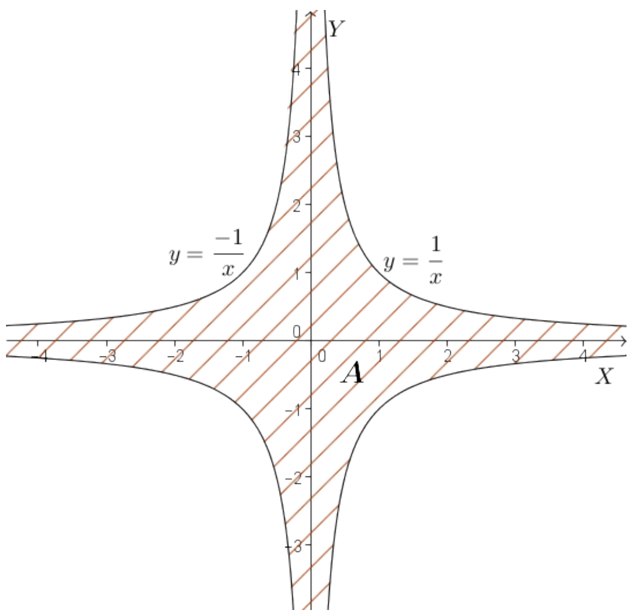
1. **On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \arcsin(xy)$.**
   (a) Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable.

   Solution. La fonction f est deux fois dérivable sur l'ensemble A décrit par

   $$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < xy < 1\right\}.$$

   (b) Dans un repère orthonormé, représenter celui-ci en le hachurant.

   Solution. Voici la représentation graphique de cet ensemble A (partie hachurée) : les points des hyperboles d'équation cartésienne $xy = 1$ et $xy = -1$ sont exclus de l'ensemble.



   (c) Simplifier au maximum l'expression $D_x D_y f(x,y)$.

   Solution. En un point de A, on a

   $$D_y f(x,y) = D_y\left(\arcsin(xy)\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}.$$

   Par conséquent, en un point de A, l'expression donnée vaut

$$D_x\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-x^2y^2} - x\dfrac{-2xy^2}{2\sqrt{1-x^2y^2}}}{1-x^2y^2} = \frac{1-x^2y^2+x^2y^2}{(1-x^2y^2)\sqrt{1-x^2y^2}} = \frac{1}{(1-x^2y^2)\sqrt{1-x^2y^2}}.$$

2. **On donne la fonction f par**

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \; x \neq 1.$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0**.**

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et on a

$$Df(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad D^2 f(x) = \frac{6}{(1-x)^4} \quad et \quad D^3 f(x) = \frac{24}{(1-x)^5}.$$

Comme $f(0) = 1,\; Df(0) = 2$ et $D^2 f(0) = 6$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

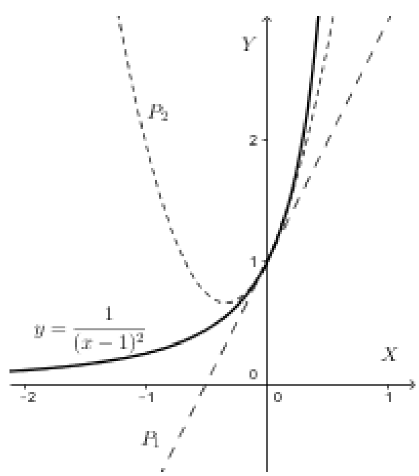
$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 1 + 2x, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2 f(0)}{2!}x^2 = 1 + 2x + 3x^2, \; x \in \mathbb{R}.$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.

Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in]-\infty, 1[$, il existe u_1, u_2 strictement compris entre 0 et x tels que

$$R_1(x) = \frac{6}{(1-u_1)^4} \cdot \frac{x^2}{2!} = \frac{3x^2}{(1-u_1)^4}, \quad R_2(x) = \frac{24}{(1-u_2)^5} \cdot \frac{x^3}{3!} = \frac{4x^3}{(1-u_2)^5}.$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0**.**
Solution.

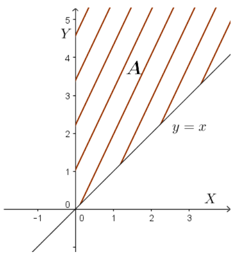


3. **On donne**

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y \frac{e^{x-y}}{1+x^2} \, dx \right) dy.$$

(a) Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration A ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



Comme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in [0,y]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[,\ y \in [x,+\infty[\}$, en permutant l'ordre d'intégration, on a

$$I' = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{x-y}}{1+x^2}\, dy \right) dx.$$

(b) Si possible, déterminer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.

Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{e^{x-y}}{1+x^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur A, ensemble non fermé borné.

Etudions l'intégrabilité de f sur A.
Pour x fixé dans $[0,+\infty[$, la fonction $h : y \mapsto \dfrac{e^x}{1+x^2}\, e^{-y}$ est continue et positive sur $[x,+\infty[$. Pour tout $t > x$, calculons $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_x^t \frac{e^x}{1+x^2}\, e^{-y}\ dy$. Si cette limite est finie alors h sera intégrable en $+\infty$ donc sur $[x,+\infty[$ et la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale de h sur cet ensemble. On a

$$\lim_{t\to+\infty} \int_x^t \frac{e^x}{1+x^2}\, e^{-y}\ dy = -\frac{e^x}{1+x^2} \lim_{t\to+\infty} [e^{-y}]_x^t = -\frac{e^x}{1+x^2} \lim_{t\to+\infty} (e^{-t} - e^{-x}) = \frac{1}{1+x^2}$$

car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$. La limite étant finie, h est intégrable sur $[x,+\infty[$ et son intégrale sur cet ensemble vaut $\dfrac{1}{1+x^2}$.

Considérons $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, fonction continue et positive sur l'intervalle non borné $[0,+\infty[$. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme g est continu sur $[0,t]$ $\forall t > 0$, on a

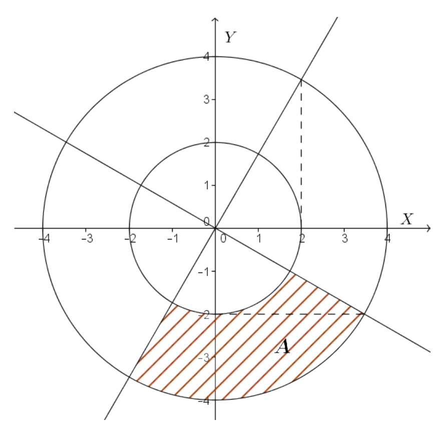
$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\ dx = \lim_{t\to+\infty} [\text{arctg}(x)]_0^t = \lim_{t\to+\infty} \text{arctg}(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Vu que cette limite est finie, g est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0,+\infty[$ et l'intégrale de g sur cet ensemble vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

Dès lors, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on a $I = I' = \dfrac{\pi}{2}$.

4. **On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2+y^2}{y^2}$. Si c'est possible, calculer**

$$I = \int\int_A f(x,y)\ dx\ dy.$$



Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2+y^2}{y^2}$ est continue sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ donc sur A, ensemble borné fermé. Dès lors, la fonction est intégrable sur A.
Utilisons les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale demandée. Les abscisses et ordonnées des points d'intersection des cercles avec les droites intervenant dans les bords de A permettent de conclure que ces droites ont pour équation cartésienne $y = \sqrt{3}x$ ou encore $y = \mathrm{tg}(4\pi/3)x$ et $y = \frac{-\sqrt{3}}{3}x$ ou encore $y = \mathrm{tg}(11\pi/6)x$. Ainsi, l'ensemble d'intégration décrit en coordonnées polaires est

$$A' = \left\{(r,\theta) : r \in [2,4],\ \theta \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right]\right\}.$$

La fonction à intégrer est la fonction

$$g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta)) = \frac{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)}{r^2\sin^2(\theta)} = \frac{r^2}{r^2\sin^2(\theta)} = \frac{1}{\sin^2(\theta)}$$

multipliée par le jacobien égal à r. Par application du théorème d'intégration par changement de variables, l'intégrale demandée est donc égale à

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \left(\int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{11\pi}{6}} \frac{r}{\sin^2(\theta)}\, d\theta\right) dr &= \int_2^4 r\ dr\ .\ \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{11\pi}{6}} \frac{1}{\sin^2(\theta)}\, d\theta \\
&= \left[\frac{r^2}{2}\right]_2^4\ .\ [-\mathrm{cotg}(\theta)]_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{11\pi}{6}} \\
&= \left(\frac{16-4}{2}\right)\left(\mathrm{cotg}\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \mathrm{cotg}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) \\
&= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\right) \\
&= \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

5. **(a) La série suivante est-elle convergente ? Si la réponse est oui, en déterminer la somme**

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{1+j^2}.$$

Solution. On a

$$\frac{j}{1+j^2} \geq \frac{j}{2j^2} \geq \frac{1}{2j} \geq \frac{1}{2}.\frac{1}{j} \geq 0$$

quel que soit le naturel $j \geq 1$.
Comme la série de terme général $\dfrac{1}{j}$ ne converge pas, vu le critère de comparaison, on en déduit que la série donnée (de terme général $\dfrac{j}{1+j^2}$) ne converge pas non plus.

(b) Depuis le sol, on lance une petite fusée. On note C la quantité de carburant (en litres) au départ. Tous les 1000 km, elle consomme une part (notée q) du carburant qui lui reste. Après M milliers de kilomètres (M est un naturel strictement positif), elle aura ainsi consommé

$$S_M = qC\sum_{m=0}^{M-1}(1-q)^m$$

litres. En supposant que $q \in]0,1[$, et en sommant la série, si c'est possible, peut-on dire que la fusée aura assez de carburant ? Pourquoi ?

Solution. Comme $q \in]0,1[$, on a $1-q \in]0,1[$ et la série $\sum_{m=0}^{+\infty}(1-q)^m$ est une série géométrique convergente dont la somme vaut $\frac{1}{1-(1-q)} = \frac{1}{q}$.

Ainsi,

$$\lim_{M\to+\infty} S_M = qC\,\frac{1}{q} = C$$

ce qui montre que la fusée aura assez de carburant.

6. **(a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Factoriser le déterminant de la matrice**

$$\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ a+b & (a+b)^2 & (a+b)^3 \end{pmatrix}$$

et en déduire que celui-ci est nul si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$ ou $|a| = |b|$.

Solution. Par la propriété de linéarité d'un déterminant (mise en évidence de a dans la première ligne, de b dans la deuxième et de $(a+b)$ dans la troisième), ainsi que les règles de calcul élémentaires (remplacement des lignes 2 et 3 par leur soustraction avec la première) , on a

$$\det\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ a+b & (a+b)^2 & (a+b)^3 \end{pmatrix} = ab(a+b)\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & a+b & (a+b)^2 \end{pmatrix}$$

$$= ab(a+b)\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & b & 2ab+b^2 \end{pmatrix} = ab^2(a+b)(b-a)\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & 2a+b \end{pmatrix}$$

$$= ab^2(a+b)(b-a)(2a+b-b-a) = a^2b^2(a+b)(b-a).$$

Ce déterminant est donc nul si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$ ou $|a| = |b|$.

(b) **Soient $\alpha, \beta > 0$ et soit la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \beta & -2\beta & \beta \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer les valeurs propres de cette matrice.

Solution. Les valeurs propres de A sont les solutions de

$$\det\begin{pmatrix} -\alpha-\lambda & \alpha & 0 \\ \beta & -2\beta-\lambda & \beta \\ 0 & \alpha & -\alpha-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

qui est une équation polynomiale (de degré 3) en l'inconnue λ.
En remplaçant la première colonne par la somme des trois, en mettant $(-\lambda)$ en évidence puis en retirant de la première ligne la troisième, on a

$$\det\begin{pmatrix} -\alpha-\lambda & \alpha & 0 \\ \beta & -2\beta-\lambda & \beta \\ 0 & \alpha & -\alpha-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -\lambda & \alpha & 0 \\ -\lambda & -2\beta-\lambda & \beta \\ -\lambda & \alpha & -\alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda\det\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & -2\beta-\lambda & \beta \\ 1 & \alpha & -\alpha-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha+\lambda \\ 1 & -2\beta-\lambda & \beta \\ 1 & \alpha & -\alpha-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\alpha+\lambda)(\alpha+2\beta+\lambda)$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont 0, $-\alpha$ et $-\alpha-2\beta$.

(2) Si c'est possible, déterminer une matrice inversible qui transforme A en une matrice diagonale et donner l'expression de cette matrice diagonale.

Solution. Puisque $\alpha,\beta>0$, les valeurs propres sont simples et la matrice est diagonalisable.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont les vecteurs non nuls $X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ tels que

$$AX=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0\\ \beta & -2\beta & \beta\\ 0 & \alpha & -\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} -\alpha x+\alpha y=0\\ \beta x-2\beta y+\beta z=0\\ \alpha y-\alpha z=0\end{cases}$$

Puisque $\alpha,\beta\neq 0$, le système s'écrit aussi

$$\begin{cases} -x+y=0\\ x-2y+z=0\\ z-y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=y\\ z=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y\\ y\\ y\end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\text{ où } c\in\mathbb{C}_0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $-\alpha$ sont les vecteurs non nuls $X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ tels que

$$(A+\alpha I)X=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0\\ \beta & -2\beta+\alpha & \beta\\ 0 & \alpha & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} \alpha y=0\\ \beta x-(2\beta-\alpha)y+\beta z=0\\ \alpha y=0\end{cases}$$

Puisque $\alpha,\beta\neq 0$, le système s'écrit aussi

$$\begin{cases} y=0\\ z=-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\\ 0\\ -x\end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $-\alpha$ sont donc les vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\text{ où } c\in\mathbb{C}_0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $(-\alpha-2\beta)$ sont les vecteurs non nuls $X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ tels que

$$(A+(\alpha+2\beta)I)X=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 2\beta & \alpha & 0\\ \beta & \alpha & \beta\\ 0 & \alpha & 2\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} 2\beta x+\alpha y=0\\ \beta x+\alpha y+\beta z=0\\ \alpha y+2\beta z=0\end{cases}$$

Puisque $\alpha,\beta\neq 0$, le système s'écrit aussi

$$\begin{cases} x=\dfrac{-\alpha}{2\beta}y\\ z=\dfrac{-\alpha}{2\beta}y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{-\alpha}{2\beta}y\\ y\\ \dfrac{-\alpha}{2\beta}y\end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $(-\alpha-2\beta)$ sont donc les vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix}\alpha\\-2\beta\\\alpha\end{pmatrix} \text{ où } c\in\mathbb{C}_0.$$

Dès lors, une matrice inversible possible est donnée par

$$S=\begin{pmatrix}1&1&\alpha\\1&0&-2\beta\\1&-1&\alpha\end{pmatrix} \quad \text{et est telle que} \quad S^{-1}AS=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-\alpha&0\\0&0&-\alpha-2\beta\end{pmatrix}.$$

MATH B'

(a) **Dans un repère orthonormé du plan, on donne l'ellipse d'équation cartésienne**

$$9x^2+y^2=9.$$

Si $\mathcal{C}$ désigne la partie de cette courbe qui se trouve dans le second quadrant, calculer les intégrales suivantes

$$(1)\int_{\mathcal{C}} xy\ ds, \qquad (2)\int_{\mathcal{C}} y\ dy, \qquad (3)\int_{\mathcal{C}} x\ dy.$$

Solution. L'équation cartésienne de l'ellipse se réécrivant, sous forme canonique, $x^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$, un paramétrage (injectif) de la courbe $\mathcal{C}$ est donné par

$$\vec{\gamma}\ :\ t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\mapsto[\cos(t),\ 3\sin(t)]\,.$$

Ce paramétrage est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$D\vec{\gamma}(t)=[-\sin(t),\ 3\cos(t)]\neq\vec{0}\quad\forall t\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[,$$

ce qui montre qu'il est régulier, et

$$\|D\vec{\gamma}(t)\|=\sqrt{\sin^2(t)+9\cos^2(t)}=\sqrt{1+8\cos^2(t)}.$$

(1) Comme l'intégrant $f:(x,y)\mapsto xy$ est continu sur la courbe $\mathcal{C}$, l'intégrale a un sens et on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} xy\, ds&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(t)\,3\sin(t)\,\sqrt{1+8\cos^2(t)}\,dt=-\frac{3}{16}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}D\left(1+8\cos^2(t)\right)\,\sqrt{1+8\cos^2(t)}\,dt\\&=-\frac{3}{16}.\frac{2}{3}\left[\left(1+8\cos^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\frac{13}{4}.\end{aligned}$$

(2) Comme l'intégrant $f:(x,y)\mapsto y$ est continu sur la courbe $\mathcal{C}$, l'intégrale a un sens et on a

$$\int_{\mathcal{C}} y\,dy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}3\sin(t)\,3\cos(t)\,dt=\frac{9}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(2t)\,dt=\frac{9}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\frac{9}{2}.$$

(3) Comme l'intégrant $f:(x,y)\mapsto x$ est continu sur la courbe $\mathcal{C}$, l'intégrale a un sens et on a

$$\int_{\mathcal{C}} x\,dy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(t)\,3\cos(t)\,dt=3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}\left(1+\cos(2t)\right)\,dt=\frac{3}{2}\left[t+\frac{\sin(2t)}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{3\pi}{4}.$$

(b) Déterminer explicitement f et I, intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 1, tels que $f\in C_1(I)$, $f(x)\neq0$ quel que soit $x\in I$, $f(1)=1$ et f est solution de l'équation différentielle $Df(x)=\dfrac{f^2(x)}{x}$.

Solution. Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire d'ordre 1, à second membre séparé : elle se réécrit
$$Df(x) = G\left(f(x)\right).g(x)$$
où $G : y \mapsto y^2$ est continu sur $\mathbb{R}$ et où $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continu sur $\mathbb{R}_0$.

Analyse

Supposons que I soit un intervalle ouvert contenant 1, que $f \in C_1(I)$ et ne s'annule pas dans I. On a alors
$$\int \frac{Df(x)}{f^2(x)}\,dx = -\int D\left(\frac{1}{f(x)}\right)\,dx \simeq \frac{-1}{f(x)}\ , \qquad x \in I.$$
Si en plus f vérifie l'équation différentielle, alors on a
$$\int \frac{Df(x)}{f^2(x)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx \simeq \ln(x)\ , \qquad \forall x \in I \cap]0, +\infty[= J.$$
Il existe donc $C \in \mathbb{C}$ tel que
$$\frac{-1}{f(x)} = \ln(x) + C\ , \qquad \forall x \in J.$$
Comme $f(1) = 1$, on en déduit que $C = -1$ donc
$$\frac{1}{f(x)} = 1 - \ln(x)\ , \qquad \forall x \in J.$$
Cette égalité implique que $e \notin J$, donc finalement,
$$f(x) = \frac{1}{1 - \ln(x)}\ , \qquad \forall x \in J \subset]0, e[.$$

Synthèse

On vérifie directement que $f(x) = \dfrac{1}{1 - \ln(x)}$, $x \in]0, e[$, vérifie l'équation différentielle et la condition imposée.

Remarque

Si on suppose $f(1) = 1$, $1 \in I$ et $f \in C_0(I)$, il existe toujours un intervalle ouvert contenant 1 dans lequel f ne s'annule pas.