1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématiques générales (partim B)

Corrigé de l'interrogation de math du 11 avril 2016

Version 11 avril 2016

QUESTIONNAIRE

Théorie

1. (A propos de l'unicité de l'inverse d'une matrice carrée.)
   On donne trois matrices carrées de dimension n, notées A, B, C et on désigne par I la matrice identité de dimension n. Démontrer que si $BA = AC = I$ alors $B = C$.

2. a) Enoncer le théorème d'intégration par changement de variables pour une fonction de 2 variables.
   b) En déduire la formule d'intégration par changement de variables polaires dans le cas d'une fonction continue sur un ensemble fermé borné. Justifier votre réponse.
   c) Sans la calculer et en utilisant le point b), déterminer la nouvelle expression de l'intégrale

$$\iint_A \frac{y}{x^2+y^2}\, dx\, dy \qquad \text{avec} \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 \le x^2+y^2 \le 9,\; y \le 0,\; y \le x \le -y\right\}$$

   si on travaille en coordonnées polaires.
   Représenter A dans un repère orthonormé en le hachurant.

Exercices

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & (1+i)^2 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Cette matrice est-elle diagonalisable ? Justifier.
   b) Si oui, en déterminer une forme diagonale ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.

2. On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2 y)$.
   Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable. Dans celui-ci, simplifier au maximum l'expression $D_y D_x f(x,y)$.

3. On donne une fonction continûment dérivable sur le rectangle $R =]1, +\infty[\times]-\infty, 0[$ et on la désigne par f.
   a) Représenter R dans un repère orthonormé.
   b) Dans quel intervalle (de réels) la fonction suivante est-elle dérivable ?

$$g \;:\; t \mapsto f\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right), -\sqrt{e^2\, t - 1}\right)$$

   c) Si c'est possible, donner l'expression explicite de la dérivé de g en fonction des dérivées partielles de f au point $t = \dfrac{2}{e^2}$.

4. Soit f une fonction intégrable sur la partie fermée A du plan telle que

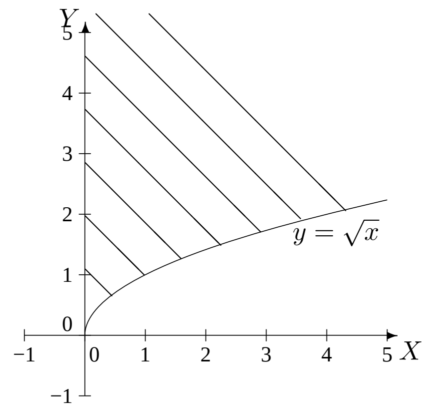
$$\iint_A f(x,y)\, dxdy \;=\; \int_1^{+\infty} \left(\int_{-2}^{y+1} f(x,y)\, dx\right)\, dy.$$

   a) Représenter l'ensemble d'intégration A dans un repère orthonormé en le hachurant.
   b) Permuter l'ordre d'intégration.

5. Si possible, calculer l'intégrale suivante

$$\iint_A \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\,dx\,dy,$$

où A est l'ensemble hachuré ci-contre.



CORRIGE

Questions de théorie

1. **(A propos de l'unicité de l'inverse d'une matrice carrée.)**
On donne trois matrices carrées de dimension n, notées A, B, C et on désigne par I la matrice identité de dimension n. Démontrer que si $BA = AC = I$ alors $B = C$.

   Solution. Voir cours (amphi et syllabus)

2. **a) Enoncer le théorème d'intégration par changement de variables pour une fonction de 2 variables.**

   Solution. Voir cours (amphi et syllabus)

   b) En déduire la formule d'intégration par changement de variables polaires dans le cas d'une fonction continue sur un ensemble fermé borné. Justifier votre réponse.

   Solution. Voir cours (amphi et syllabus)

   c) Sans la calculer et en utilisant le point b), déterminer la nouvelle expression de l'intégrale

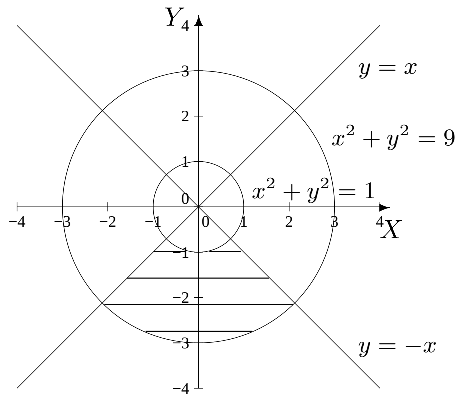
$$\iint_A \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad \textbf{avec} \qquad A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 1\le x^2+y^2\le 9,\ y\le 0,\ y\le x\le -y\right\}$$

   si on travaille en coordonnées polaires.
   Représenter A dans un repère orthonormé en le hachurant.

   Solution. On a

$$\iint_A \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_1^3\left(\int_{5\pi/4}^{7\pi/4}\frac{r\sin(\theta)}{r^2}\,r\,d\theta\right)dr = \int_1^3\left(\int_{5\pi/4}^{7\pi/4}\sin(\theta)\,d\theta\right)dr$$

   et l'ensemble A est la partie du plan hachurée ci-dessous, les points des bords étant inclus dans l'ensemble.



Exercices

1. **Soit la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & (1+i)^2 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$**.**

   a) Cette matrice est-elle diagonalisable ? Justifier.
   b) Si oui, en déterminer une forme diagonale ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.

   Solution. a) Comme $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique est

   $$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2i \\ -i & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda) + 2i^2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1).$$

   Les valeurs propres sont donc 2 et -1. Puisqu'elles sont simples, la matrice est diagonalisable.

   b) Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -1 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

   $$(A+I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2iy = 0 \\ -ix + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = ix.$$

   Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -1 sont les vecteurs $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $c_1 \in \mathbb{C}_0$.

   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 2 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

   $$(A - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -i & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2iy = 0 \\ -ix - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2iy.$$

   Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 2 sont les vecteurs $c_2 \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 \in \mathbb{C}_0$.

   Ainsi, par exemple, la matrice inversible

   $$S = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{est telle que} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. **On donne explicitement la fonction** f **par** $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2 y)$**.**
   Déterminer le domaine où la fonction est deux fois dérivable. Dans celui-ci, simplifier au maximum l'expression $D_y D_x f(x,y)$.

   Solution. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^2$.

Dans $\mathbb{R}^2$, on a

$$D_y D_x f(x,y) = D_y\left(\frac{2xy}{1+x^4y^2}\right) = \frac{2x(1-x^4y^2)}{(1+x^4y^2)^2}.$$

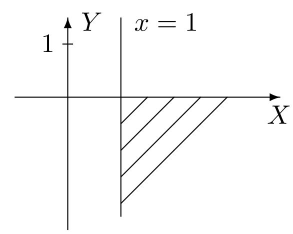
3. **On donne une fonction continûment dérivable sur le rectangle $R =]1,+\infty[\times]-\infty,0[$ et on la désigne par f.**
a) Représenter R dans un repère orthonormé.
b) Dans quel intervalle (de réels) la fonction suivante est-elle dérivable ?

$$g\ :\ t \mapsto f\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right), -\sqrt{e^2\,t-1}\right)$$

c) Si c'est possible, donner l'expression explicite de la dérivé de g en fonction des dérivées partielles de f au point $t = \dfrac{2}{e^2}$.

Solution.

a) L'ensemble R est la partie du plan hachurée ci-contre, les points des bords étant exclus de R.



b) Les fonctions $f_1 : t \mapsto \ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\ln(t)$ et $f_2 : t \mapsto -\sqrt{e^2\,t-1}$ sont respectivement dérivables dans $]0,+\infty[$ et $]e^{-2},+\infty[$. La fonction g, composée de f ($f \in C_1(R)$) et de f_1 et f_2, est donc dérivable dans

$$I = \left\{t \in]e^{-2},+\infty[: (f_1(t), f_2(t)) \in R\right\} = \left\{t \in]e^{-2},+\infty[: -\ln(t) > 1, -\sqrt{e^2\,t-1} < 0\right\}$$

$$= \left\{t \in]e^{-2},+\infty[: t < e^{-1}\right\} = \left]\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right[.$$

c) Comme g est dérivable sur I par application du théorème de dérivation des fonctions composées, la dérivée de g en fonction des dérivées partielles de f est donnée explicitement par

$$(Dg)(t) = (D_1 f)_{\left(-\ln(t),-\sqrt{e^2t-1}\right)}\ .\ D(-\ln(t)) + (D_2 f)_{\left(-\ln(t),-\sqrt{e^2t-1}\right)}\ .\ D(-\sqrt{e^2t-1})$$

$$= \left(D_1 f\right)_{\left(-\ln(t),-\sqrt{e^2t-1}\right)}\ .\ \left(\frac{-1}{t}\right) + \left(D_2 f\right)_{\left(-\ln(t),-\sqrt{e^2t-1}\right)}\ .\ \left(\frac{-e^2}{2\sqrt{e^2t-1}}\right)$$

si $D_1 f$ et $D_2 f$ sont respectivement les dérivées par rapport à la première et la deuxième variable de f quel que soit $t \in I$.

Comme $\ln(\frac{2}{e^2}) = \ln(2) - 2$ et $\sqrt{e^2\ .\ \frac{2}{e^2} - 1} = 1$, il s'ensuit que la valeur de cette dérivée au point $2/e^2 \in I$ est égale à

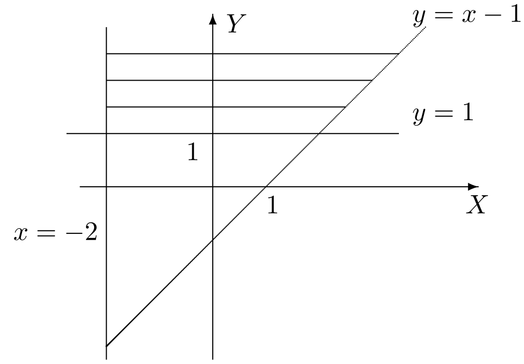
$$(Dg)(2e^{-2}) = \left(\frac{-e^2}{2}\right)\left[\left(D_1 f\right)_{(2-\ln(2),-1)} + \left(D_2 f\right)_{(2-\ln(2),-1)}\right]$$

si $D_1 f$ et $D_2 f$ sont respectivement les dérivées par rapport à la première et la deuxième variable de f.

4. **Soit f une fonction intégrable sur la partie fermée A du plan telle que**

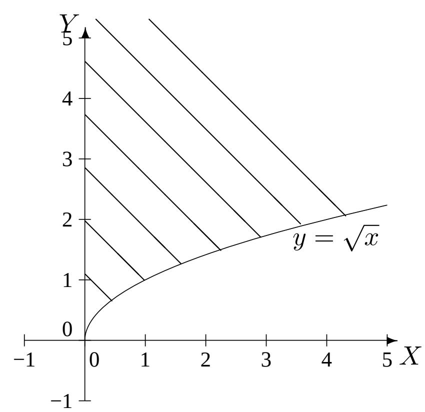
$$\iint_A f(x,y)\ dxdy\ =\ \int_1^{+\infty}\left(\int_{-2}^{y+1} f(x,y)\ dx\right)\ dy.$$

a) Représenter l'ensemble d'intégration A dans un repère orthonormé en le hachurant.
Solution. On a
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq 1 \ , \ -2 \leq x \leq y+1\} .$$
Sa représentation graphique est la suivante, les points des bords étant compris dans l'ensemble.



b) Permuter l'ordre d'intégration.
Solution. L'ensemble A peut aussi s'écrire sous la forme
$$A = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [-2,2], \ y \in [1,+\infty[\Big\} \cup \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [2,+\infty[\ , \ y \in [x-1,+\infty[\Big\} .$$
Puisque la fonction f est intégrable sur A, en permutant les intégrales on obtient
$$\iint_A f(x,y) \ dxdy = \int_{-2}^{2} \left(\int_1^{+\infty} f(x,y) \ dy \right) dx + \int_2^{+\infty} \left(\int_{x-1}^{+\infty} f(x,y) \ dy \right) dx.$$

5. **Si possible, calculer l'intégrale suivante**
$$\iint_A \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2} \, dx \, dy,$$
où A est l'ensemble hachuré ci-contre.



Solution. L'ensemble d'intégration est l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]0,+\infty[\text{ et } x \in [0,y^2]\}$.

Etudions l'intégrabilité de $f : (x,y) \mapsto \dfrac{ye^{-y^2}}{x+y^2}$ sur A sachant que $|f(x,y)| = f(x,y), \ \forall (x,y) \in A$ et que f est continu sur $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y^2 \neq 0\}$.

Pour y fixé dans $]0,+\infty[$, la fonction $h : x \mapsto \dfrac{ye^{-y^2}}{x+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-y^2\}$ donc sur le fermé borné $[0,y^2]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a
$$\int_0^{y^2} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2} \, dx = ye^{-y^2} \int_0^{y^2} \frac{1}{x+y^2} \, dx = ye^{-y^2} \Big[\ln\left(x+y^2\right) \Big]_0^{y^2}$$
$$= ye^{-y^2} \left(\ln(2y^2) - \ln(y^2) \right) = ye^{-y^2} \ \ln\left(\frac{2y^2}{y^2} \right) = \ln(2) \ ye^{-y^2}.$$

La fonction $g : y \mapsto \ln(2)\, ye^{-y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, +\infty[$. Vérifions l'intégrabilité de g en $+\infty$. Par le critère en θ , avec $\theta = 3$, on a

$$\lim_{y\to+\infty} \left(y^3 \ \ln(2)\ ye^{-y^2}\right) = \ln(2) \lim_{y\to+\infty} \frac{(y^2)^2}{e^{y^2}} = \ln(2) \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0,$$

puisque l'application du théorème de la limite d'une fonction composée donne

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{(y^2)^2}{e^{y^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^t}$$

et qu'à l'infini, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance antagoniste. Comme cette limite existe et est finie avec $\theta > 1$, la fonction est intégrable en $+\infty$. Dès lors, elle est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme f est une fonction positive sur A, on obtient

$$\iint_A \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2} dxdy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{y^2} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\ dx\right) dy = \int_0^{+\infty} \left(\ln(2)\ ye^{-y^2}\right) dy$$

$$= \frac{\ln(2)}{-2} \left[e^{-y^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{-\ln(2)}{2} \left(\lim_{y\to+\infty} \left(e^{-y^2}\right) - e^0\right) = \frac{1}{2}\ln(2).$$

En effet, on a $e^0 = 1$ et l'application du théorème de la limite d'une fonction composée donne

$$\lim_{y\to+\infty} e^{-y^2} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0$$