1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Exercices de mathématiques
Révisions en vue de l'interrogation du 11 avril 2016

Version 14 mars 2016

RÉPÉTITION 8 : RÉVISIONS

A préparer AVANT de venir à la répétition

1. La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Pourquoi ?

   Si oui, en déterminer une forme diagonale Δ ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.

2. Soient les matrices A et B données par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i^3 \\ 0 & i & 0 \\ \frac{1}{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^* = \begin{pmatrix} 2i & i & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Si possible, effectuer les opérations suivantes et simplifier la réponse au maximum :

$$1)\ A + \widetilde{B} \qquad 2)\ C = AB \qquad 3)\ C^{-1}$$

3. On donne la fonction f par

$$f : (x, y) \mapsto f(x, y) = \arcsin(y^2 + x + 1)$$

   (a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.

   (b) Calculer la dérivée de f par rapport à sa deuxième variable.

   (c) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(5t^2 - 1, 2t)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.

   (d) Si F est dérivable en $1/6$, que vaut sa dérivée en ce point ? Simplifier votre réponse au maximum.

4. On donne la fonction f continûment dérivable sur $]1, 2[\times]0, 1[$ et à valeurs strictement positives.

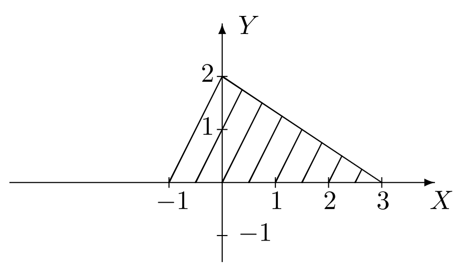
   (a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $g : x \mapsto \ln(f(\sqrt{x}, \ln(3 - x)))$.

   (b) Calculer la dérivée de g en fonction de f et de ses dérivées partielles.

   (c) Si g est dérivable en $5/2$, que vaut sa dérivée en ce point ?

5. On donne l'ensemble fermé hachuré A suivant. Déterminer

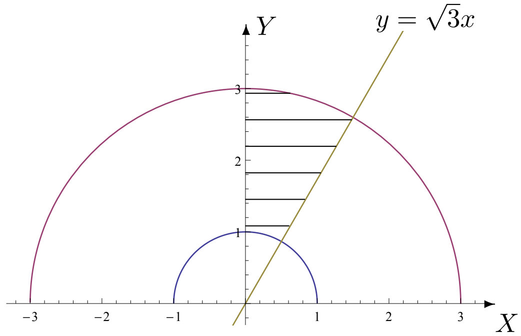
$$\iint_A y\, e^{y-2x} dxdy.$$



6. Calculer, si possible l'intégrale suivante

$$\iint_A \frac{x}{y} dxdy,$$

   où A est l'ensemble fermé hachuré ci-dessous.



7. La fonction f étant supposée intégrable, permuter l'ordre d'intégration après avoir représenté l'ensemble d'intégration si
$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{1}{x+1}} f(x,y)\; dy \right) \; dx.$$

8. Soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < 0\}$. Calculer, si possible, les intégrales suivantes et représenter leurs ensembles d'intégration.

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{x^2 y}{(4x^2+y^2)^2} dx \right) dy$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\int_{-x^2}^{-x} \frac{y\, e^{2x}}{x^2}\; dy \right) dx$ c) $\displaystyle\iint_C \sin(x-y)\, e^x \; dx\; dy$