1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématique : partim B

Listes type

Répétitions Biologie

Version 25 janvier 2016

Liste 1 : calcul matriciel (1)

A préparer AVANT de venir à la répétition

1. Qu'appelle-t-on une matrice ?
2. Qu'appelle-t-on le type (ou le format) et la dimension d'une matrice ?
3. Etant donné une matrice A, définir
   (a) sa matrice conjuguée,
   (b) sa matrice transposée,
   (c) sa matrice adjointe.
4. Définir les opérations suivantes et en donner les propriétés :
   (a) addition de deux matrices du même type,
   (b) multiplication d'une matrice par un nombre complexe,
   (c) multiplication de deux matrices.
5. Qu'appelle-t-on le déterminant d'une matrice ? Peut-on toujours le définir ?
6. Citer les propriétés liées aux déterminants.
7. Qu'appelle-t-on matrice inverse d'une matrice carrée donnée ?
8. Quelle est la forme de cette matrice ?
9. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice inverse d'une matrice carrée donnée existe.

Préambule

Toutes les disciplines étudiant des phénomènes linéaires utilisent les matrices. Après modélisation, l'outil « matrices » permet d'effectuer de manière efficace, claire et très gérable, des calculs et estimations qui semblent à priori parfois complexes.

In applied mathematics, the Leslie matrix is a discrete, age-structured model of population growth that is very popular in population ecology. It was invented by and named after P. H. Leslie. The Leslie Matrix (also called the Leslie Model) is one of the best known ways to describe the growth of populations (and their projected age distribution), [...]. [1] En utilisant les matrices, les éléments qui y sont liés (détermimant, valeurs propres, vecteurs propres, ...), on récolte beaucoup d'informations quant à l'évolution de la population modélisée, comme des taux de croissance à long terme, l'estimation de tel ou tel type d'individus après un certain temps, etc

---

REMARQUE pour cette liste
- Plusieurs exercices ont déja été faits ou suggérés aux cours et s'ajoutent donc à ceux-ci.

1. Le texte qui suit est tiré de Wikipedia.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 1(2-7), II. 1(A - C) et III. (D) seront résolus par l'assistant.

I. Opérations entre matrices

1. Soient les matrices A, B, C données par

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1+i & -1 \\ \frac{3}{i} & (2-i)^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ i & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{i+1} \\ -2i & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$1)\ A+B,\ 2)\ A+\widetilde{B},\ 3)\ A.B,\ 4)\ A.B+C,\ 5)\ B.A,\ 6)\ C.\widetilde{A},\ 7)\ A^*.C,\ 8)\ i.C,\ 9)\ (i.A)^*.$$

2. Soit A une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{ij} = 1$, $\forall i, j$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $C = AB - BA$ et en déduire la forme de $\widetilde{C} + C$.

3. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 2A + 3I = 0$.

4. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

II. Déterminants

1. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-i & 3i \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ (i+1)^2 & 5 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix} \ D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en $x \in \mathbb{C}$. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.

$$A = \begin{pmatrix} 1-x & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2-x \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} i & x+2 \\ -x & -i \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} x & -4 \\ 1 & x \end{pmatrix}. \ D = \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 0 & x+1 & x \\ 1 & 0 & x-2 \end{pmatrix}.$$

III. Inversion de matrices

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Liste 2 : calcul matriciel (2)

A préparer AVANT de venir à la répétition

1. Etant donné une matrice carrée A,
   (a) qu'appelle-t-on valeur propre de A ?
   (b) qu'appelle-t-on vecteur propre de A ?
2. En pratique, comment détermine-t-on les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée.
3. Qu'appelle-t-on matrice diagonale ?
4. Qu'appelle-t-on matrice diagonalisable ?
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.
6. Qu'appelle-t-on matrice stochastique ? (si vu au cours théorique)
7. Qu'appelle-t-on vecteur de probabilité ? (si vu au cours théorique)

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 2(C) et II. 1 (si vu au cours théorique) seront résolus par l'assistant.

I. Diagonalisation

1. Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en donner la multiplicité.

$$A = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale Δ, ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Calculer les produits AS et $S\Delta$. Comparer les matrices obtenues. N'aurait-on pas pu prévoir ce resultat sans effectuer les calculs ? Pourquoi ?

3. Une matrice carrée A de dimension 2 possède les deux valeurs propres 1 et -1, auxquelles peuvent être associés respectivement les vecteurs propres $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Que vaut A ?

II. Divers

1. L'institut météorologique a fait les observations suivantes :
   – on n'a jamais vu deux jours ensoleillés consécutifs,
   – s'il fait beau un jour donné, on a une chance égale d'avoir de la pluie ou de la neige le lendemain,
   – s'il pleut ou s'il neige, on a une chance sur deux que le temps se maintienne le jour suivant et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.
   Sachant cela,
   (a) Représenter la matrice de transition de ce système.
   (b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quel pourcentage de chance a-t-on qu'il fasse beau dans deux jours ?
   (c) A long terme, quelle sera l'évolution du climat ?

2. Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.
   L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 70 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 10.
   S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 6 fois sur 10 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.
   Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.
   (a) Si un lapin vient de manger des carottes, quelle est la probabilité qu'il mange de la salade dans deux repas ?
   (b) A longue échéance, que mange ce lapin ?

3. En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle θ) est représentée par une matrice du type
$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
   où θ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).
   – Pour tout θ, déterminer la matrice produit M_θ^2 et en simplifier les éléments au maximum.
   – Montrer que quels que soient θ, θ', les matrices M_θ et $M_{\theta'}$ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?
   – Montrer que quel que soit le réel θ, la matrice
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
   est aussi une matrice qui représente une rotation.

4. Vrai ou faux (Justifier)
   (a) Toute matrice carrée de dimension 3 commute avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) La matrice $\begin{pmatrix} a-b & a^2-ab+b^2 \\ a^2-b^2 & a^3-b^3 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$ est inversible.
   (c) Si une matrice carrée A de dimension 2 est de déterminant nul, alors l'une des colonnes de A est multiple de l'autre.
   (d) Si deux lignes d'une matrice carrée A de dimension 3 sont identiques, alors $\det A = 0$.
   (e) Si A est une matrice carrée de dimension 3, alors $\det(5A) = 5 \det A$.
   (f) Si B est la matrice obtenue en multipliant la ligne 3 d'une matrice carrée A de dimension 3 par 5, alors $\det B = 5 \det A$.

Liste 3 : compléments et Fonctions de plusieurs variables (1)

A propos de cette liste

Cette liste d'exercices reprend des énoncés du type de ceux résolus au premier quadrimestre (I). Ces rappels relatifs aux représentations d'ensembles seront utiles pour les exercices portant sur les fonctions de plusieurs variables.

Ensuite viennent des exercices sur les fonctions de plusieurs variables (II et III) pour lesquels une préparation est nécessaire.

A préparer AVANT de venir à la répétition

II. Définitions et représentations graphiques

Qu'appelle-t-on

1. domaine de définition d'une fonction de 2 variables ?
2. courbe de niveau d'une fonction de 2 variables ?
3. surface de niveau d'une fonction de 3 variables ?
4. trace d'une surface de niveau dans un plan orthogonal à l'un des axes ?
5. surface quadrique ? Quelles sont les différentes quadriques ?

III. Dérivation et gradient

1. Quand dit-on qu'une fonction de 2 variables est dérivable par rapport à sa première (resp. deuxième) variable en un point de coordonnées (x_0, y_0) d'un ouvert où elle est définie ?
2. Qu'appelle-t-on dérivée partielle d'une fonction de deux variables ?
3. Définir le gradient d'une fonction de plusieurs variables.

Préambule

Les fonctions de plusieurs variables apparaissent tout naturellement dans de nombreux domaines. Ainsi, par exemple, la distance d'un point de l'espace (muni d'un repère orthonormé) à l'origine s'exprime par

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

si x, y, z sont les coordonnées du point, la loi des gaz parfaits

$$pV = nRT$$

(où p est la pression du gaz (en pascal), V est le volume occupé par le gaz (en mètre cube), n est la quantité de matière (en mole), R est la constante universelle des gaz parfaits et T est la température absolue (en kelvin)) permet d'exprimer la pression (par exemple) en fonction des autres paramètres, ...

Les exemples sont nombreux et la bonne manipulation (expression d'une variable ou d'un paramètre en fonction des autres, dérivation, intégration, ...) de ces fonctions est indispensable pour bien utiliser les modèles de divers phénomènes (physiques, chimiques, biologiques, ...)

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

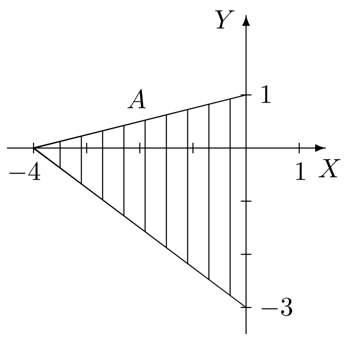
Lors de la répétition, les exercices II. 1(g) - 2(b) - 4(a), III. 2(h) et 5(c) seront résolus par l'assistant.

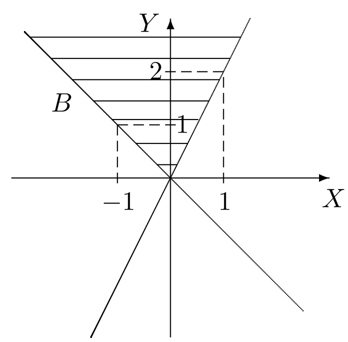
I. Représentation d'ensembles

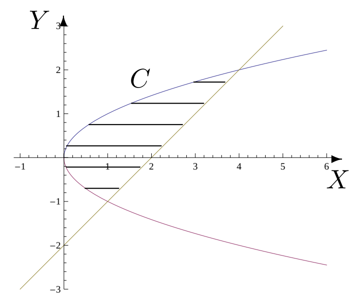
1. Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est la suivante

$$\begin{aligned}
&\text{a) } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{1-x^2}\}\}\\
&\text{b) } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2\}\\
&\text{c) } C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y,\ y \in [0,1]\}
\end{aligned}$$

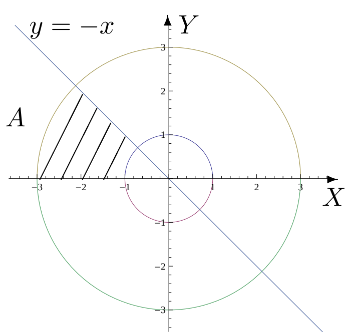
2. Décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble, en donnant d'abord
   a) l'ensemble de variation des abscisses
   b) l'ensemble de variation des ordonnées.

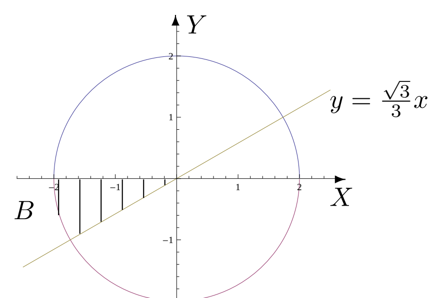






3. En utilisant les coordonnées polaires, décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans A mais non dans B.





4. Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 > 1\}.$$

   Ensuite, décrire analytiquement cet ensemble en utilisant les coordonnées polaires.

II. Définitions et représentations graphiques

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{y^2}{4} - x^2 + 1\right), \quad g(x,y) = \sqrt{1 - |2x - y|}, \quad h(x,y) = \arcos(xy).$$

S'il appartient au domaine de définition, donner l'image de $(1/2, -1)$ par f, de $(1, 2)$ par g et de $(2, 1)$ par h. Dans un repère orthonormé de l'espace représenter ces points et leur image éventuelle.

2. Dans chacun des cas suivants, représenter les courbes de niveau d'équation $f(x,y) = c$ si
a) $f(x,y) = 4x - y$ et $c = -2,\ 4$
b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ et $c = -1,\ 0,\ 1$
c) $f(x,y) = x^2 - y$ et $c = -2,\ 1$

3. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les trois axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$ dans le plan d'équation $z = 0$ puis dans celui d'équation $x = 0$. Comment appelle-t-on chacune de ces courbes ? Quelle est la nature de cette quadrique ?

4. Esquisser les représentations graphiques des surfaces quadriques dont les équations cartésiennes sont

$$a)\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \qquad\qquad b)x^2 + y^2 = 4.$$

III. Dérivation et gradient

1. En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction f donnée explicitement par $f(x,y) = 3x^2 + xy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1, 2)$ et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.

2. On donne les fonctions f, g et h par

$$f(x,y) = \ln(x^2 - 4 + y), \quad g(x,y) = \cos(x^2y^2 + 4y) \quad \text{et} \quad h(x,y) = x^2\, e^{-\frac{x}{y}}.$$

a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.

3. On donne la fonction f par $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 + 4y^2})$.
a) Déterminer son domaine de définition et d'infinie dérivabilité.
b) Dans le domaine d'infinie dérivabilité, calculer $D_x^2 f + D_y^2 f$.

4. a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2\, x_2 \sin(3x_3)$.
b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x,y,z) = x^2 e^{xy^2\sqrt{z}}$.

5. On donne les fonctions f et g respectivement par

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) \qquad g(x,y) = \exp(\sqrt{x + y^2 + 1}).$$

a) Déterminer le domaine de définition A et d'infinie dérivabilité B de ces fonctions. Représenter ces domaines.
b) Déterminer l'expression explicite de $|x|D_x f(x,y) + |y|D_y f(x,y)$.
c) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f\left(\frac{1}{t}, t\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
d) Déterminer l'expression explicite de $G(t) = g(\sin^2(t), \cos(t))$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.

Liste 4 : fonctions de plusieurs variables (2)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Dérivation des fonctions composées

1. Qu'appelle-t-on fonction composée ?
2. Quel est l'énoncé du théorème donnant les dérivées partielles d'une fonction composée à partir des dérivées partielles des fonctions de départ ?

II. Permutation de l'ordre d'intégration

Qu'appelle-t-on "permutation de l'ordre d'intégration" dans le calcul des intégrales doubles ? Peut-on toujours le faire sans changer la valeur du resultat si on intègre sur un ensemble fermé borné ?

III. Intégration sur des ensembles fermés bornés

Quand une fonction de 2 variables est-elle intégrable sur un ensemble fermé borné ?

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 2(a-b-c) - 4, II. 1(a) et III. 2(b) - 3(b) seront résolus par l'assistant.

I. Dérivation des fonctions composées

1. a) On donne f, continûment dérivable sur $]-2,4[\times]-5,5[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y) = f(x+2y, 2x-5y)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression de ses dérivées partielles en fonction de celles de f.
   b) Même question pour g, continûment dérivable sur $]0,1[\times]\ln\frac{\pi}{3}, +\infty[$ et $G(x,y) = g(\exp(x),\ \ln(\arccos(y)))$.

2. On donne la fonction g continûment dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}[\times]0,+\infty[\times]0,\frac{10}{9}[$.
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f : t \mapsto f(t) = g(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1)$.
   b) Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.
   c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en 0 ? en $1/3$?
   d) Mêmes questions si g est continûment dérivable sur $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[\times]\sqrt{2}, +\infty[\times]0,3[$.

3. Soit $F(t) = f(x(t), y(t))$ avec $x(3) = 2,\ y(3) = 7,\ (Dx)(3) = 5,\ (Dy)(3) = -4,\ (D_x f)(2,7) = 6$ et $(D_y f)(2,7) = -8$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en 3, que vaut (DF)(3) ?

4. Soit $F(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en $(1,0)$ si
$$u(1,0) = 2 \quad (D_s u)(1,0) = -2 \quad (D_t u)(1,0) = 6$$
$$v(1,0) = 3 \quad (D_s v)(1,0) = 5 \quad (D_t v)(1,0) = 4$$
et $(D_u f)(2,3) = -1$ et $(D_v f)(2,3) = 10$, calculer $(D_s F)(1,0)$ et $(D_t F)(1,0)$.

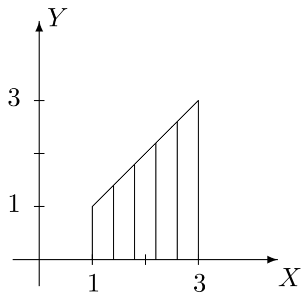
II. Permutation de l'ordre d'intégration

1. Supposons que la fonction f est intégrable sur l'ensemble considéré. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants

$$a) \int_{-1}^{1} \left(\int_{y-2}^{2-y} f(x,y)\ dx \right)\ dy \qquad\qquad b) \int_{0}^{3} \left(\int_{y}^{\sqrt{18-y^2}} f(x,y)\ dx \right)\ dy.$$

2. On considère une fonction f intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné A ci-dessous. Ecrire, dans un ordre et dans l'autre, l'intégrale

$$\int\int_A f(x,y)dx\,dy.$$



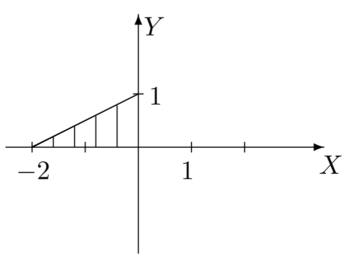
III. Intégration sur des ensembles fermés bornés

1. Dans le plan, on considère l'ensemble borné fermé A délimité par le graphique de la droite d'équation cartésienne $x+y=0$ et celui de la fonction $x \mapsto -x^2$.
   a) Représenter A dans un repère orthonormé et en donner une expression analytique.
   b) Calculer, si elle existe, l'intégrale de f sur A si $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x\cos(y)$.

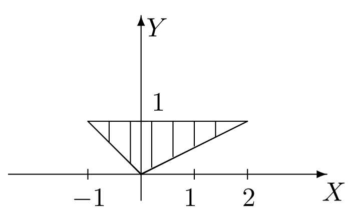
2. Si elle existe, calculer l'intégrale de
   a) $f(x,y) = 4 + x^2$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,2],\ y \in [1+x^2, 9-x^2]\}$
   b) $f(x,y) = \cos(y^2)$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0],\ y \in [-x,1]\}$
   c) $f(x,y) = y^2\cos(xy)$ sur $A = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \times [-1,1]$

3. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble A borné fermé hachuré ci-dessous dans les cas suivants

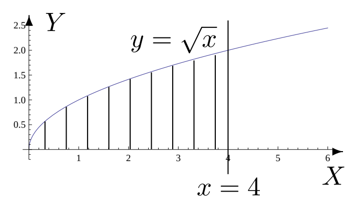
a) $\int\int_A e^{x-y}\ dx\,dy$



b) $\int\int_A xy\ dx\,dy$



c) $\displaystyle\int\int_A \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\ dx\,dy$



Liste 5 : fonctions de plusieurs variables (3)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Volume d'un corps

Quelle est l'interprétation "graphique" de l'intégrale double d'une fonction continue et positive sur un ensemble fermé borné du plan ?

II. Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. Si une fonction est continue sur un ensemble A non fermé borné parallèle à l'axe Y, quand dit-on qu'elle est intégrable sur A ? Comment définit-on alors son intégrale ?
2. Même question si l'ensemble A est parallèle à l'axe X.
3. Si une fonction est continue sur un ensemble A non fermé borné, quand peut-on permuter l'ordre d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale ?

III. Intégration par changement de variables polaires

1. Que vaut le jacobien dans le cas d'un changement de variables polaires ?
2. Donner la formule d'intégration par changement de variables polaires dans le cas d'une fonction continue sur un ensemble fermé borné.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 2, II. 2(b) et III. 3 seront résolus par l'assistant.

I. Volume d'un corps

Calculer le volume des corps de l'espace décrits ci-dessous. Donner aussi une représentation graphique de ces corps.

1. Corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 1 - x^2$ et les plans d'équation $z = 0,\ y = -1$ et $y = 2$.
2. Corps borné par les plans de coordonnées et la surface d'équation $2x + 3y + z = 6$

II. Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. Si elles ont un sens, calculer les intégrales suivantes et représenter l'ensemble d'intégration.
   a) $\displaystyle\int\int_A \frac{1}{x}\, dx\, dy \quad$ avec $\quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$
   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \left(\int_0^{+\infty} e^{y-3x}\, dx\right) dy$
   c) $\displaystyle\int\int_A e^{-y^2}\, dx\, dy \quad$ avec $\quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$
   d) $\displaystyle\int\int_A x^3\, e^{-x^2 y}\, dx\, dy \quad$ avec $\quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 1 \leq xy\}$

2. Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.

$$a)\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{y^2}\frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\,dx\right)dy,\quad b)\int_0^1\left(\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}\,dy\right)dx,\quad c)\int_0^1\left(\int_0^{x^2}\frac{1}{x+y}\,dy\right)dx$$

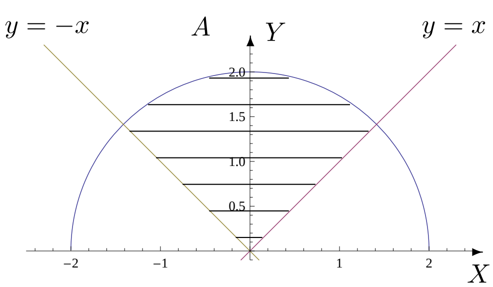
3. On considère l'intégrale double suivante

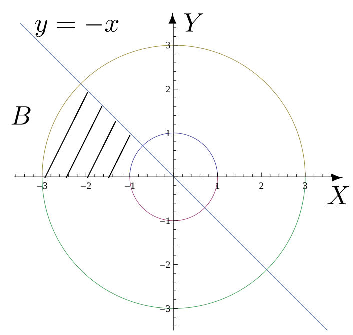
$$I=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^x\cos(y-x)e^{-x}\,dy\right)dx$$

a) Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
b) Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales dans un ordre et dans l'autre.
c) Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Pouvait-on le prévoir sans calculer les 2 intégrales ?

III. Intégration par changement de variables polaires

1. Si elle existe, calculer
a) $\displaystyle\int\int_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.
b) $\displaystyle\int\int_B xy\,dx\,dy$ où B est l'ensemble hachuré ci-dessous.
c) $\displaystyle\int\int_C (2x+y)\,dx\,dy$ où $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le \inf\{-x,\sqrt{1-x^2}\}\}$.





2. Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où

$$x_A=s^{-1}\int\int_A x\,dx\,dy,\quad y_A=s^{-1}\int\int_A y\,dx\,dy$$

et où s est l'aire de la surface A.
Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un tiers de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

3. Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne $z=9-x^2-y^2$ et par le plan d'équation $z=0$.

Liste 6 : approximations polynomiales

A préparer AVANT de venir à la répétition

Approximations polynomiales

1. Qu'appelle-t-on approximation polynomiale d'une fonction en un point de son domaine de définition ?
2. Quelle forme cette approximation a-t-elle quand la fonction est suffisamment dérivable ?
3. (a) Enoncer le résultat appelé "Développement limité de Taylor".
   (b) Relier ce résultat aux notions d'approximation polynomiale et de reste de l'approximation polynomiale d'une fonction en un point.

Préambule A propos des **approximations polynomiales.**

*****

Qu'entend-on par approximation polynomiale d'une fonction dans le cas où celle-ci est suffisamment dérivable ?

Comment introduire ces approximations à partir des connaissances actuelles ?

A quoi peuvent servir ces approximations ?

*****

Le *théorème des accroissements finis* pour une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ s'exprime de la manière suivante : quels que soient les réels a et x de cet intervalle, il en existe un autre (notons-le ξ) situé entre a et x, tel que la valeur de la fonction en x s'exprime à partir de sa valeur en a suivant l'égalité suivante

$$f(x) = f(a) + (x-a)Df(\xi).$$

Ceci peut s'interpréter en disant que l'erreur commise en approchant la valeur de f en x par sa valeur en a est proportionnelle à l'écart entre les deux points (a et x) et à la dérivée de la fonction f calculée en un réel intermédiaire entre a et x.

Lorsque la fonction est plus régulière, ce résultat peut être étendu de la manière suivante (*c'est ce que l'on appelle le développement limité de Taylor*). Si f est p fois dérivable dans I, alors quels que soient les réels a et x de cet intervalle, il en existe un autre (notons-le ξ) situé entre a et x, tel que la valeur de la fonction en x s'exprime à partir des valeurs en a de ses $p-1$ premières dérivées suivant l'égalité suivante

$$f(x) = f(a) + (x-a)Df(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{p-1}}{(p-1)!}D^{p-1}f(a) + \frac{(x-a)^p}{p!}D^p f(\xi).$$

La fonction P définie par

$$P(t) = f(a) + (t-a)Df(a) + \ldots + \frac{(t-a)^{p-1}}{(p-1)!}D^{p-1}f(a), \quad t \in \mathbb{R}$$

est un polynôme de degré au plus $p-1$ en la variable t. Le développement limité de Taylor ci-dessus s'écrit ainsi

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-a)^p}{p!}D^p f(\xi)$$

et nous dit que la valeur de f en x est approchée par la valeur en x de ce polynôme, l'erreur commise étant proportionnelle à l'écart entre la p^e puissance de l'écart entre a et x et à la dérivée d'ordre p de la fonction f calculée en un réel intermédiaire entre a et x.

Si a est fixé et que la dérivée d'ordre p de f est continue en a, alors on en déduit que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^p} = 0.$$

Ceci exprime de façon précise la manière dont le polynôme approche la fonction au voisinage de a. Voir cours pour plus de détails.

Ce genre de résultat est très utile quand il s'agit d'obtenir une estimation de grandeurs physiques.
Ainsi par exemple, la force de marée agissant sur une masse m peut être définie comme la différence de l'attraction de la Lune sur cette masse située à la surface de la Terre et de l'attraction de la Lune sur cette masse en supposant qu'elle est au centre de la Terre. Si on désigne par R le rayon terrestre, d la distance[2] Terre-Lune, G la constante de gravité, M la masse de la Lune, on peut alors écrire

$$F = \frac{GMm}{(d-R)^2} - \frac{GMm}{d^2}$$

en un point de la surface terrestre situé sur la droite joignant le centre de la Terre et le centre de la Lune. En tenant compte du fait que le rapport R/d est petit, une expression approximative (simplifiée) de la force F est donnée par

$$F^{Approx} = \frac{2GMmR}{d^3}.$$

Exercice après lecture du préambule

Expliquer pourquoi une approximation de F est donnée par l'expression précédente.

REMARQUE pour cette liste
Plusieurs exercices d'approximations polynomiales seront faits ou suggérés aux cours et s'ajoutent donc à ceux-ci.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices 1 ($f_3,\ f_6$) - 2 - 3 seront résolus par l'assistant.

Approximations polynomiales

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations.

   $f_1(x) = \cos(x)\ e^{3x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3$ $\qquad$ $f_2(x) = \sqrt{1+9x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2$

   $f_3(x) = \dfrac{1}{1-2x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2$ $\qquad$ $f_4(x) = \mathrm{arctg}(x),\ x_0 = 0$ (resp. $x_0 = 1$)$, n = 0, 1, 2$

   $f_5(x) = \cos^2(x),\ x_0 = 0,\ n = 0, 1, 2$ $\qquad$ $f_6(x) = \sin(x),\ x_0 = 1, n = 0, 1, 2$

2. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction cos et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.
3. Un professeur de mathématique lance un défi à ses élèves. Le premier qui donnera une approximation du nombre e avec les 3 premières décimales exactes et pourra expliquer sa méthode aux autres sera dispensé de la prochaine interrogation. Pour relever le défi, les élèves, restés en classe, n'ont droit qu'à une feuille et un crayon. Ils sont sans accès à internet et ne peuvent utiliser ni gsm, ni calculatrice ...

   Comment peuvent-ils procéder ?

---

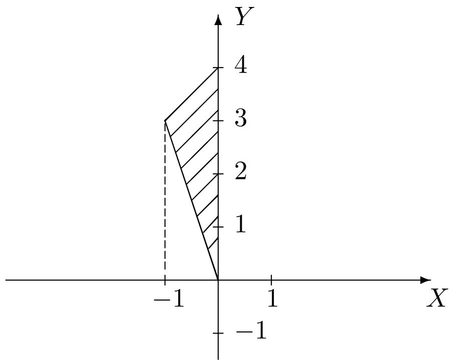
2. entre les centres respectifs

Liste 7 : révisions

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

1. On donne la fonction f par
$$f(x,y) = \sqrt{x + y^2 - 1}$$
   (a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.
   (b) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(3t^2, 2t+1)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.
   (c) Que vaut la dérivée de F en 1 ? Simplifier votre réponse au maximum.

2. On donne l'ensemble fermé hachuré A suivant. Déterminer
$$\int\int_A x e^{x-y}\,dxdy.$$



3. On donne la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
   (a) Déterminer les valeurs propres de A.
   (b) Cette matrice est-elle diagonalisable ? Si oui, en donner une forme diagonale ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit puis vérifier que ces matrices sont correctes.
   (c) Montrer que la matrice A vérifie $A^2 - 4A + 5I = 0$ où I est la matrice identité.

4. Soient les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ i \end{pmatrix}$$
   Si c'est possible, calculer
   (a) 1) AB 2) BA 3) BC 4) CB 5) AC 6) CA
   (b) le déterminant des matrices obtenues ci-dessus
   (c) la matrice inverse de A et des matrices obtenues ci-dessus

5. On donne la fonction f par
$$f(x) = \text{tg}(2x).$$
   (a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre 1, 2 et 3 en 0.
   (b) Dans un même repère orthonormé, représenter le graphique de f et les approximations demandées au voisinage de 0 en utilisant différentes couleurs.