1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématiques générales : partim B

Répétition 1* : Physique

Version 15 avril 2016

Répétition 1* : compléments d'algèbre linéaire et compléments sur les équations différentielles (1)

Exercices à résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire) :
I (1,2,4), II ((a), (c), (e)), III ((a), (b)),
IV ((a), (b), (c), (e)), V ((a), (c), (d), (f)), VI (3, 5, 6(a), 7(a))

Lors de la répétition, les exercices I (3), II (d), III (c), IV ((d), (g)) et V ((b), (g)) seront résolus par l'assistant.

I. Représentation d'un opérateur linéaire dans une base, changement de base

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la projection orthogonale sur la première bissectrice.
(a) Cette opération est-elle linéaire ?
(b) Si oui, en déterminer la représentation matricielle dans la base constituée des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ de composantes respectives $(1,0)$, $(0,1)$ (appelée *base canonique* du plan).
(c) Cette représentation matricielle est-elle diagonalisable ? Le cas échéant, expliquer à quoi correspond toute forme diagonale de cette représentation matricielle.

2. On considère le plan muni du repère orthonormé $(O;(\vec{e}_1,\vec{e}_2))$ où $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est la base canonique du plan ; on note cet espace vectoriel E. Soit le vecteur
$$\vec{b} = \frac{\vec{e}_1+\vec{e}_2}{\|\vec{e}_1+\vec{e}_2\|}$$
et l'opérateur
$$\mathcal{P} : E \to E,\ \vec{x} \mapsto (\vec{x}\cdot\vec{b})\vec{b}.$$
(a) Cet opérateur est-il linéaire ?
(b) Si oui, en déterminer la représentation matricielle P dans la base canonique $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.
Cette matrice P est-elle diagonalisable ? Le cas échéant, en déterminer une forme diagonale P' ainsi qu'une matrice S y conduisant.
Interpréter le passage de P à P' et caractériser la base dans laquelle $\mathcal{P}$ est représenté par P'.

3. Soit l'opérateur
$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x-2y \\ -5x+y \end{pmatrix}.$$
(a) Vérifier que cet opérateur est linéaire.
(b) Déterminer la représentation matricielle de T dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
(c) Vérifier que les vecteurs
$$\vec{e'}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \qquad \vec{e'}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$
constituent une autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$.
(d) Déterminer la matrice de changement de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
(e) Déterminer la représentation matricielle de T dans la base $\mathcal{B}'$.
(f) Déterminer, en fonction des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$, des vecteurs $\vec{e''}_1, \vec{e''}_2$ formant une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle T est représenté par une matrice diagonale.

4. Soit l'opérateur

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+y+z \\ -6x+4y+2z \\ 3x-y+z \end{pmatrix}.$$

(a) Vérifier que cet opérateur est linéaire.
(b) Déterminer la représentation matricielle de T dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
(c) Vérifier que les vecteurs

$$\vec{e'}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \qquad \vec{e'}_2 = 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \qquad \vec{e'}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$$

constituent une autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
(d) Déterminer la matrice de changement de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
(e) Déterminer la représentation matricielle de T dans la base $\mathcal{B}'$.
(f) Déterminer, en fonction des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$, des vecteurs $\vec{e''}_1, \vec{e''}_2, \vec{e''}_3$ formant une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle T est représenté par une matrice diagonale.

II. Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant l'intervalle sur lequel on travaille (f est une fonction de la variable réelle x).

(a) $D^3f(x) + 2D^2f(x) - Df(x) - 2f(x) = e^x + x^2$

(b) $D^2f(x) - 2Df(x) + 3f(x) = \sin(x)$

(c) $D^3f(x) - 4Df(x) = xe^{2x} + x^2$

(d) $D^3f(x) - 12Df(x) + 16f(x) = 32x - 8$

(e) $D^3f(x) + Df(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$

(f) $\sin(x)D^2f(x) + \sin(x)f(x) = 1$

III. Equations d'Euler

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $]0, +\infty[$ (f et y sont des fonctions de la variable réelle $x > 0$).

(a) $x^2D^2f(x) - xDf(x) + f(x) = x$
(b) $x^5D^5f(x) + x^4D^4f(x) - 2x^3D^3 - 2x^2D^2f(x) + xDf(x) + f(x) = 0$
(c) $x^3D^2y - x^2Dy - 3xy + 16\ln(x) = 0$
(d) $(x+1)^2D^2f(x) + (x+1)Df(x) + f(x) = x^2 + 2\sin\ln(1+x)$
(Sugg. : poser $x + 1 = e^t$)

IV. Equations exactes

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant l'intervalle sur lequel on travaille (f et u sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $xDf(x) + f(x) + x^3 = 0$

(b) $\ln(x)Du + \dfrac{u}{x} = \dfrac{3}{x}\ln^2(x)$

(c) $Du = -\dfrac{3x^2u - u^3}{x^3 - 3xu^2}$

(d) $Df(x) = -\dfrac{f(x)\cos(xf(x)) + 2x}{x\cos(xf(x))}$

(e) $x^2D^2u - xDu = 2x^4e^{-x^2}$ (Sugg. : diviser les deux membres par x^3)

(f) $x^2Df(x) + 4f(x)Df(x) + 2xf(x) - 1 = 0$

(g) $xuDu + u^2 + x^2 = 0$

(h) $xDu + u = u^3$ (Sugg. : diviser les deux membres par u^3)

V. Equations à second membre séparé

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant l'intervalle sur lequel on travaille (f, y et u sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $2\sqrt{f(x)} = Df(x)$

(b) $xf(x)Df(x) + f^2(x) + 1 = 0$

(c) $(1 + e^x)f(x)Df(x) = e^x$

(d) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}Dy = 0$

(e) $Du - 2xu = x$

(f) $Dy = \sin(x + y)$ (Sugg. : poser $u = x + y$)

(g) $(2x + 2y + 1)Dy + (x + y + 1) = 0$ (Sugg. : poser $u = x + y + 1$)

VI. Divers

1. Un flotteur plongé dans l'eau subit son propre poids et la poussée d'Archimède (égale au poids de liquide déplacé). Si la section A du flotteur est constante, la hauteur immergée $z(t)$ du flotteur varie selon
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - \rho Agz$$
où m est la masse du flotteur, g l'accélération de pesanteur et ρ la masse volumique de l'eau. Déterminer le comportement du flotteur lorsqu'on le dépose sans vitesse juste à la surface du liquide.

2. On considère un circuit électrique composé d'une force électromotrice V constante, d'une résistance R et d'une self inductance L placées en série. A l'instant initial, le circuit n'est parcouru par aucun courant. on a
$$L\frac{di}{dt} + Ri = V.$$
(a) Déterminer l'intensité $i(t)$ du courant à tout instant t.
(b) Déterminer son comportement à long terme (c'est-à-dire pour t tendant vers l'infini).

3. Un médecin arrivant sur le lieu d'un crime constate que la température du mort est de 32° et que la température de l'air ambiant est de 18°C. Deux heures plus tard, la température du mort est descendue à 26°. En supposant que le taux de refroidissement du corps est proportionnel à la différence de température entre l'air et le corps de la victime (loi de Newton) et que la température du corps au moment du décès était de 36°C, déterminer le temps écoulé depuis la mort de la victime jusqu'à l'arrivée du médecin.

4. Si on tient compte des pertes de mémoire, le taux de mémorisation d'un cours est donné par
$$\frac{dA}{dt}(t) = \alpha\left(M - A(t)\right) - \beta A(t)$$
où α et β sont des constantes positives, où $A(t)$ désigne la quantité de matière mémorisée et où M désigne la quantité de matière totale à mémoriser.
(a) Déterminer la quantité de matière mémorisée à tout instant t.
(b) Déterminer la quantité de matière mémorisée à long terme.
(c) Déterminer la quantité de matière mémorisée à tout instant t si, initialement, rien n'a été mémorisé.

5. L'équation de la déformation d'une poutre élastique supportant une charge uniformément répartie sur toute sa longueur l est donnée par
$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_0 \qquad , \qquad 0 \leq x \leq l$$
où EI représente la rigidité flexionnelle de la poutre et où w_0 représente la charge par unité de longueur.
Déterminer la déformation d'une poutre encastrée à ses deux extrémités, c'est-à-dire telle que
$$y(0) = y(l) = 0 \qquad , \qquad Dy(0) = Dy(l) = 0.$$

6. La forme prise par une corde à sauter mise en rotation par deux enfants placés aux deux extrémités de la corde et synchronisant leurs mouvements est donnée par

$$\frac{d}{dx}\left[T(x)\frac{dy}{dx}\right] + \rho\omega^2 y(x) = 0 \quad , \quad y(0) = y(l) = 0$$

où ρ désigne la masse par unité de longueur et $T(x)$ la tension dans la corde.
Déterminer les vitesses ω critiques et les formes $y(x)$ associées pour lesquelles la rotation de la corde est possible
(a) si la tension T dans la corde est supposée constante ;
(b) si la tension dans la corde est donnée par $T(x) = (x+1)^2$.
(Sugg. : il faut trouver les formes y non identiquement nulles [1])

7. Soit la réaction chimique $A + B \to C$.
A l'instant initial $t = 0$ sont présentes a moles du corps A, b moles du corps B et aucune mole du corps C. En posant $x(t)$ le nombre de moles du corps C présentes à l'instant t, on suppose que la vitesse d'apparition de C suit la loi

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

où k est une constante positive.
Déterminer la concentration x de C à tout instant t, ainsi que la concentration de C à long terme, dans le cas où
(a) initialement, les corps A et B sont présents en même quantité ;
(b) initialement, le corps A est présent en plus grande quantité que le corps B.

1. Le cas particulier $y = 0$ correspond au cas où la corde est tendue horizontalement et ne tourne donc pas.