1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématiques générales : partim B

Répétition 2* : Physique

Version 21 avril 2016

Répétition 2* : compléments sur les équations différentielles (2) et intégrales paramétriques

A résoudre PENDANT la répétition
(et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I (a), II (b) et V (2) seront résolus par l'assistant.

I. Equations différentielles à second membre linéaire

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant le domaine sur lequel on travaille (f et y sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $(1+x^2)Dy(x) - 2xy(x) = (1+x^2)^2$

(b) $Df(x) + 2xf(x) = 2xe^{-x^2}$

(c) $xDy(x) + y(x) = -x^3$

(d) $x^3Df(x) + (2-3x^2)f(x) = x^3$

(e) $\dfrac{1}{y^2(x)}Dy(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{xy(x)}$

(f) $Df(x) = \operatorname{tg}(x)f(x) + \cos(x),\ f(0) = 1$

II. Equations différentielles à second membre homogène

Résoudre les équations différentielles suivantes (f et y sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $Df(x) = \dfrac{x}{f(x)} + \dfrac{f(x)}{x}$

(b) $y(x) + (2\sqrt{xy(x)} - x)Dy(x) = 0$

(c) $xDy(x) = y(x)\ln\left(\dfrac{y(x)}{x}\right)$

(d) $y^2(x) - 3x^2 + 2xy(x)Dy(x) = 0$

(e) $f^2(x) + x(x - f(x))Df(x) = 0$

(f) $Df(x) = \dfrac{f(x)}{x} + \dfrac{f^2(x)}{x^3}$

III. Equations différentielles - Types

Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer **SANS LA RESOUDRE** le type d'équation dont il s'agit ainsi qu'une méthode pour la résoudre (f et y sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $Df(x) = \dfrac{x+2f(x)+5}{2x+4f(x)-3}$

(b) $Dy(x) = -\dfrac{2y(x)+1}{x}$

(c) $Df(x) = \dfrac{e^{2f(x)} - f(x)\cos(xf(x))}{x\cos(xf(x)) - 2xe^{2f(x)} - 2f(x)}$

(d) $(1-x^2)Dy(x) = y(x) - (x+1)^2(x-1)$

(e) $x^2D^2f(x) + xDf(x) + f(x) = \dfrac{1}{\cos(\ln(x))} + 2\sin(\ln(x))$

(f) $D^6f(x) - 2D^4f(x) - 4D^2f(x) + 8f(x) = e^{\sqrt{2}x} + \cos(x)$

(g) $(x^2 + 2xy(x) - y^2(x)) + (y^2(x) + 2xy(x) - x^2)Dy(x) = 0$

(h) $\sqrt{1-x^2}Df(x) - f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

IV. Equations différentielles - Résolution

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant (si possible) le domaine sur lequel on travaille (f et y sont des fonctions de la variable réelle x).

(a) $Dy(x) + y(x)\text{cotg}(x) = 5e^{\cos(x)}$

(b) $xDf(x) - f(x) = x^2e^x$

(c) $3y^2(x)Dy(x)x + y^3(x) = x + 1$

(d) $x^2D^2f(x) - 2f(x) = 2x - 1$, sur $]0, +\infty[$

(e) $Df(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{\sin(f(x))}$

(f) $D^2y(x) + \omega^2y(x) = \dfrac{1}{\cos(\omega x)}$

(g) $(x - f(x))Df(x) = f(x)$ (Sugg. : poser $u = \frac{f(x)}{x}$)

(h) $D^3y(x) - 2D^2y(x) + Df(x) = xe^x$

V. Dérivation des intégrales paramétriques

1. Soient un réel a et une fonction f telle que $t \mapsto f(t)e^{-at}$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$.
   Montrer que la fonction
   $$x \mapsto F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\, dt$$
   est dérivable sur $]a, +\infty[$ et que, dans cet intervalle, on a
   $$DF(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-xt}f(t)\, dt.$$

2. Calculer (si possible)
   $$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}\, e^{-x}\, dx$$
   pour tous réels $a,\ b$.

3. Calculer (si possible)
   $$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax) - \arctan(bx)}{x}\, dx \quad (a,\ b > 0).$$

4. Soit
   $$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x}\, dx, \quad t > -1.$$
   (a) Montrer que cette fonction est bien définie et est continûment dérivable sur $]-1, +\infty[$.
   (b) Calculer $F(0)$.
   (c) Montrer que $DF(t) = \dfrac{1}{t+1}$.
   (d) En déduire l'expression explicite (pas sous forme d'intégrale) de F.

VI. Divers

1. Si un médicament est administré en continu via une perfusion, la concentration $x(t)$ de ce médicament dans le sang est gouvernée par l'équation
   $$\frac{dx}{dt}(t) = \alpha - \beta x(t)$$
   où α et β sont des constantes positives.
   (a) Déterminer la concentration $x(t)$ à tout instant t.
   (b) Déterminer vers quoi tend cette concentration à long terme.
   (c) Déterminer la concentration à tout instant t si le moment initial ($t = 0$) correspond au moment où le médicament commence à être administré.

2. La distribution de la température $T(r)$ dans la région comprise entre deux cylindres concentriques de rayons $r = a$ et $r = b$ $(a < b)$ est gouvernée par la loi

$$r\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = 0 \quad \text{où} \quad T(a) = T_0,\ T(b) = T_1.$$

Déterminer $T(r)$.

3. La distribution de la température $T(r)$ dans la région comprise entre deux sphères concentriques de rayons $r = a$ et $r = b$ $(a < b)$ est gouvernée par la loi

$$r\frac{d^2T}{dr^2} + 2\frac{dT}{dr} = 0 \quad \text{où} \quad T(a) = T_0,\ T(b) = T_1.$$

Déterminer $T(r)$.

4. Dans les conditions d'équilibre des phases liquide-vapeur d'un corps pur, la formule de Clapeyron exprimant la chaleur latente L de changement d'état (volume de la phase liquide négligeable devant le volume de la phase gazeuse) s'écrit

$$L = \frac{RT^2}{p}\frac{dp}{dT}.$$

De cette expression, donner la loi de variation de la pression p en fonction de la température T.
Si un système physique est tel que, à une température initiale T_0, la pression vaut p_0, déterminer la loi particulière de variation de la pression qui régit ce système.

5. La croissance d'une tumeur peut être décrite par l'équation

$$Dx(t) = rx(t) - \beta x^2(t)$$

où $x(t)$ désigne la taille (en cm^3) de la tumeur à tout instant t et où r et β sont des constantes positives.
Déterminer l'évolution de la taille d'une tumeur qui a une taille initiale de 1 cm^3.