Université de Liège

# *1, 2, 3. . . Sciences*

***Année académique 2015-2016***

*Mathématiques générales : partim B*

Répétition 4* : Physique

Version 27 avril 2016

# Répétition 4* : paramétrages, intégrales sur une courbe et intégrales curvilignes

**A propos de cette liste**

Les intégrales curvilignes sont définies à partir des intégrales simples. Ce type d'intégrale fut inventé dans le courant du $19^{\text{ème}}$ siècle dans le cadre de la résolution de problèmes relatifs à l'écoulement des fluides, aux forces, à l'électrostatique et au magnétisme.
Les intégrales curvilignes sont fréquemment utilisées en physique, notamment par exemple pour calculer le travail d'un champ de force quand il déplace un objet le long d'une courbe. Ainsi, pour un champ de force

$$\vec{F} : (x, y, z) \mapsto [F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)]$$

donné en tout point de l'espace et une courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par

$$\vec{\gamma} \,:\, t \in [a, b] \mapsto \vec{\gamma}(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)] \in \mathbb{R}^3,$$

le **travail** exercé par $\vec{F}$ pour déplacer un point matériel du point $A\,(\gamma_1(a), \gamma_2(a), \gamma_3(a))$ au point $B\,(\gamma_1(b), \gamma_2(b), \gamma_3(b))$ est donné par l'intégrale curviligne

$$\int_{\mathcal{C}} F_1\; dx + F_2\; dy + F_3\; dz = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot D\vec{\gamma}(t)\; dt$$

Il va de soi que toute interprétation physique d'une intégrale *sur une courbe* (resp. une intégrale *curviligne*)

$$\int_C f\; ds \qquad\qquad \left(\text{resp. } \int_C f_1\; dx + f_2\; dy + f_3\; dz\right)$$

dépend de l'interprétation de la fonction $f$ (resp. $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$) elle-même.
Par exemple, si $\rho(x, y)$ représente la densité en un point $(x, y)$ d'un fin fil profilé le long d'une courbe $\mathcal{C}$, la **masse du fil** est donnée par $(\star)$

$$m = \int_{\mathcal{C}} \rho(x, y)\; ds$$

et le **centre de masse** d'un tel fil a pour coordonnées $(x_M, y_M)$ avec $(\star\star)$

$$x_M = \frac{1}{m}\int_{\mathcal{C}} x\rho(x, y)\; ds \qquad \text{et} \qquad y_M = \frac{1}{m}\int_{\mathcal{C}} y\rho(x, y)\; ds.$$

## A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

**Lors de la répétition, les exercices I (1(a)-(c)-(e)-(f), 2(d), 3(a)), II (1(b), 2(a), 3(a)) seront résolus par l'assistant.**

**I. Paramétrages de courbes**

Pour chacun des exercices suivants, on fixe un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan.

1. On donne les équations paramétriques suivantes de courbes du plan. Esquisser chacune de ces courbes et en donner une équation cartésienne.

(a) $\begin{cases} x(t) = 1 - 2t \\ y(t) = -3 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

(b) $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = 2\sin(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

(c) $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = 4\sin(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

(d) $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}, \quad t \in [-1, 1]$

(e) $\begin{cases} x(t) = -1 + \frac{3}{2}\sin(t) \\ y(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos(t) \end{cases}, \quad t \in [-\pi, 3\pi]$

(f) $\begin{cases} x(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

2. On donne les équations cartésiennes suivantes de courbes du plan. Esquisser chacune de ces courbes et en donner des équations paramétriques.

   (a) $2x + 4y - 3 = 0$ (c) $x^2 + y^2 - 4y = 0$

   (b) $x^2 + y^2 = 1$ (d) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

3. (a) Déterminer un vecteur normal ainsi qu'un vecteur tangent à la courbe plane d'équation cartésienne $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ au point de coordonnées $(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$. Donner une représentation de la courbe et de ces vecteurs.

   (b) Faire de même pour la courbe plane d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ au point de coordonnées $(-2, 1)$.

## II. Calculs de longueurs, intégrales sur une courbe et intégrales curvilignes

1. Déterminer la longueur des courbes données ci-dessous.

   (a) L'hélice circulaire située sur un cylindre de rayon R et qui tourne une seule fois autour de ce dernier, la hauteur de chacun de ses points étant proportionnelle à l'angle de la portion du tour parcourue.

   (b) La trajectoire (représentée sur la FIG. 1 ci-dessous) décrite par un point fixé sur une roue de rayon $R = 1$ lorsque cette dernière effectue un tour complet (arcade de cycloïde).

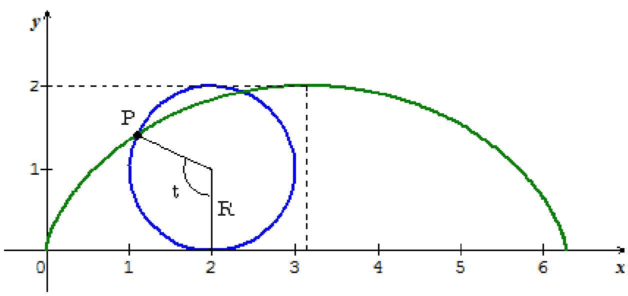


FIGURE 1 – Cycloïde de rayon R.

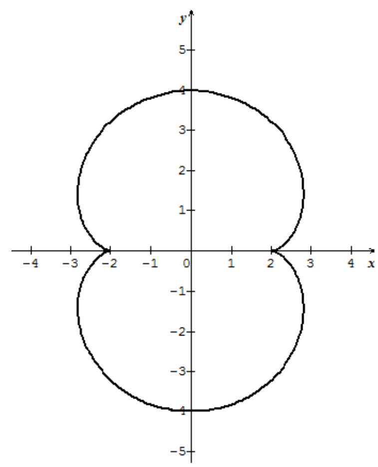


FIGURE 2 – Epicycloïde à 2 rebroussements, aussi appelée néphroïde.

   (c) L'épicycloïde à 2 rebroussements (représentée sur la FIG. 2 ci-dessus) dont une représentation paramétrique est

$$(3\cos(t) - \cos(3t), 3\sin(t) - \sin(3t)),\ t \in [0, 2\pi].$$

2. Calculer les intégrales sur les courbes suivantes.

   (a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\, ds$ où $\mathcal{C}$ est le cercle centré en $(0, 0)$ et de rayon 1.

   (b) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x + y)\, ds$ où $\mathcal{C}$ est le cercle centré en $(2, 1)$ et de rayon 2.

   (c) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\, ds$ où $\mathcal{C}$ est l'arcade de cycloïde considérée à l'exercice 1.b).

3. Calculer les intégrales curvilignes suivantes.

   (a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\, dx$ et $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\, dy$ où $\mathcal{C}$ est le cercle centré en $(0, 0)$ et de rayon 1.

   Comparer ensuite ces deux intégrales à celle calculée à l'exercice 2.a).

(b) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} ydx + xdy$ où $\mathcal{C}$ est le cercle centré en $(0,0)$ et de rayon $R$.

(c) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ où $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{9} = 1,\ x,y \geq 0\right\}$.

## III. Divers

1. On désigne par $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ les vecteurs d'une base orthonormée du plan.
   Une particule qui se déplace dans le plan est soumise à la force
   $$\overrightarrow{F} = (x-ay)\overrightarrow{e_1} + (3y-2x)\overrightarrow{e_2}.$$
   Calculer (en fonction du paramètre $a$) le travail exercé par cette force
   (a) si la particule se déplace en ligne droite de l'origine au point de coordonnées $(2,4)$ ;
   (b) si la particule effectue un tour le long d'un cercle centré à l'origine et de rayon 2 (dans le sens trigonométrique).

2. Un fil est placé le long d'un demi-cercle de rayon 1 et son épaisseur est d'autant plus petite qu'il s'éloigne du diamètre joignant les extrémités de ce demi-cercle. Si la densité en un point du fil est proportionnelle à la distance entre ce point et la droite tangente au demi-cercle et parallèle au diamètre, déterminer
   (a) la masse de ce fil ; (Sugg. : utiliser $(\star)$)
   (b) les coordonnées de son centre de masse. (Sugg. : utiliser $(\star\star)$)

3. Calculer le travail d'un satellite qui fait un demi-tour de la Terre en suivant une orbite de rayon $R$ autour de l'équateur.

4. Le potentiel électrique en un point $P$ situé à une distance $r$ d'une charge ponctuelle $q$ est donné par $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Dans ce contexte, nous considérons donc un repère orthonormé de l'espace dont l'origine coïncide avec la position de la charge.
   (a) Calculer le champ électrique $\vec{E} = -\text{grad}\, V = -\vec{\nabla} V$ en tout point de l'espace.
   (b) Calculer la différence de potentiel entre les points $(1,0,1)$ et $(2,0,4)$, en calculant l'intégrale curviligne de $\vec{E}$
   - d'une part, le long du segment joignant ces deux points ;
   - d'autre part, le long du morceau de parabole situé dans le plan $y=0$, passant par l'origine et joignant ces deux points.
   (c) Comparer ces deux résultats. Que devient la différence de potentiel si l'on considère un autre chemin joignant ces deux points ?
   (d) Calculer la différence de potentiel entre deux points situés à une même distance de la charge $q$.

5. Une tornade de hauteur $h$ emporte un arbre dans son vortex hélicoïdal[1], que nous supposons paramétré dans l'espace par
   $$\vec{\gamma}\ :\ t \in [0,h] \mapsto [t\cos(t), t\sin(t), t] \in \mathbb{R}^3.$$
   (a) Calculer la longueur de la trajectoire parcourue par l'arbre dans le vortex lorsqu'il atteint le sommet de ce dernier.
   (b) En supposant que la masse de l'arbre vaut 900 kilos, calculer le travail effectué par la tornade pour amener l'arbre à la hauteur $h$.

---

1. En météorologie, dans les tornades et cyclones, on parle de vortex pour désigner une circulation atmosphérique tourbillonnaire (spécifique d'une dépression) matérialisée par l'enroulement d'une ou plusieurs bandes nuageuses spiralées autour d'un centre de rotation.
Ici, on considère que la trajectoire des vents constituant le vortex correspond à une spirale qui monte, centrée sur un axe vertical, et qui s'éloigne de ce dernier.