Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématiques générales : partim B

Répétition 5* : Physique

Version 27 avril 2016

RÉPÉTITION 5* : INTÉGRALES DE SURFACES ET FORMULES DE GAUSS, GREEN ET STOKES

A propos de cette liste

Les intégrales de surface interviennent dans beaucoup de situations physiques, particulièrement pour les calculs de flux.
Par exemple, lorsque $\vec{E}$ représente un champ électrique, l'intégrale de surface

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \bullet \vec{n}\, d\sigma = \phi_e,$$

où $\vec{n}$ la normale unitaire à la surface, est appelée le **flux du champ électrique** $\vec{E}$ traversant la surface $\mathcal{S}$. Une des importantes lois de l'électrostatique est la **loi de Gauss** qui stipule que la charge totale à l'intérieur d'une <u>surface fermée</u> (c'est-à-dire le <u>bord d'un borné fermé de $\mathbb{R}^3$</u>) $\mathcal{S}$ est donnée par

$$Q = \epsilon_0 \iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \bullet \vec{n}\, d\sigma$$

où ϵ_0 est la permittivité du milieu (constante déterminée expérimentalement).

L'étude du **flux de chaleur** constitue une autre application des intégrales de surface. En supposant que la température en un point $P(x, y, z)$ d'un corps est $T(x, y, z)$, le *transfert d'énergie thermique* a lieu selon le champ vectoriel ($\star$)

$$\vec{F} = -K \operatorname{grad} T = -K \vec{\nabla} T$$

où K est la conductivité de la substance (constante déterminée expérimentalement). La quantité de chaleur transmise à travers une surface fermée $\mathcal{S}$ dans le corps par unité de temps est alors donnée par

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \bullet \vec{n}\, d\sigma = -K \iint_{\mathcal{S}} \vec{\nabla} T \bullet \vec{n}\, d\sigma$$

où $\vec{n}$ la normale unitaire extérieure à la surface.

En ce qui concerne les formules de Green, Gauss et Stokes, elles permettent de relier les intégrales curviligne et de surface aux intégrales doubles et triples sur des ensembles bornés fermés.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I (2), II (1(a), 3(a), 4(a)) seront résolus par l'assistant.

I. Paramétrages et intégrales de surfaces

1. Soit $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère orthonormé de l'espace. On donne l'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
   (a) Représenter l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient cette équation.
   Comment s'appelle cet ensemble ?
   (b) Déterminer un paramétrage de la surface $\mathcal{S}$ correspondant aux points de cet ensemble dont la cote z est comprise entre 0 et 4.
   (c) Calculer l'aire de cette surface $\mathcal{S}$.

2. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan, on considère l'arcade de cycloïde paramétrée par

$$(t - \sin t,\ 1 - \cos t)\,, \quad t \in [0, 2\pi].$$

(a) Déterminer un paramétrage de la surface $\mathcal{A}$ délimitée par cette arcade de cycloïde et l'axe des abscisses.
(b) Calculer l'aire de cette surface $\mathcal{A}$.

3. Calculer $\displaystyle\iint_{\mathcal{B}} x^2 z \, d\sigma$ où $\mathcal{B}$ est le bord du borné fermé de l'espace défini par les relations

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad z \in [0, 1].$$

II. Formules de Gauss, Green et Stokes

1. (a) Vérifier la formule de Green pour la fonction vectorielle $\vec{f}(x, y) = [x^2 + y^2, x^2 - y^2]$ et la surface

$$\mathcal{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq y \leq 2 - x^2\right\}.$$

Représenter $\mathcal{A}$.
(b) Même question pour $\vec{f}(x, y) = [2x, -y]$ et la surface $\mathcal{B}$ bornée du plan dont les points ont une ordonnée positive et délimitée par le cercle centré à l'origine et de rayon 1 et les droites d'équation cartésienne $x = y$ et $x = -y$.

2. Calculer l'intégrale suivante en appliquant la formule de Green :

$$\int_{\mathcal{C}} -x^2 y dx + x y^2 dy$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle centré à l'origine et de rayon R (on considère l'orientation « aire à gauche »).

3. (a) Vérifier le théorème de la divergence avec les données suivantes : $\vec{f}(x, y, z) = [4x, 3z, 5y]$ et $\mathcal{S}$ est la surface du cône (portion de cône)

$$\left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, z \in [0, 2]\right\}.$$

(b) Même question pour la fonction $\vec{f}(x, y, z) = [x^2 + y^2, xy, z^2 + 1]$ et le borné fermé V du premier octant limité par le plan $z = 2y$ et le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 9$.

4. (a) Vérifier la formule de Stokes dans le cas de la fonction $\vec{f}(x, y, z) = [y^2, x^2, -x + z]$ et du triangle de sommets de coordonnées $(0, 0, 1), (1, 0, 1)$ et $(1, 1, 1)$.
(b) Même question pour la fonction $\vec{f}(x, y, z) = [x^2 y, 0, xyz]$ et la surface composée de la portion du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ limitée par les plans $z = 0$ et $z = 2$ et l'ensemble

$$\left\{(x, y, 2) : x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

III. Divers

1. Un dispositif d'éclairage est muni d'un élément réflecteur dont la forme est obtenue par rotation de la branche de parabole $y = \sqrt{z}$ ($y \in [0, 1]$) autour de l'axe OZ. Déterminer l'aire du réflecteur.

2. La température T en un point d'une boule métallique est proportionnelle au carré de la distance au centre de la boule. Calculez le taux de transmission de chaleur à travers une sphère $\mathcal{S}$ de rayon R centrée au centre de la boule.
(Sugg. : utiliser $(\star)$)

3. Un champ magnétique est donné par

$$\vec{B} = \left(5x + \sin(y^2 z)\right) \vec{e}_1 + (\arctan(xz) + 4y) \, \vec{e}_2 + (\cos(xy) - 6z) \, \vec{e}_3$$

Calculer le flux de ce champ magnétique au travers de la surface fermée $\mathcal{S}$ correspondant au bord d'un cube d'arête égale à 2 centré à l'origine. (Sugg. : remplacer l'intégrale de surface par une autre)

4. La formule de Green, stipulant que

$$\iint_K D_x f_2 - D_y f_1 \; dxdy = \oint_{\mathcal{C}^+} f_1 dx + f_2 dy$$

où K est un borné fermé du plan, $\mathcal{C}^+$ son bord orienté « aire à gauche » et $\vec{f} = (f_1, f_2)$ une fonction vectorielle continûment dérivable sur un ouvert contenant K, peut être utilisée pour déterminer l'aire d'une surface plane : en effet, en prenant $f_2 = x$ et $f_1 = 0$ (resp. $f_1 = -y$ et $f_2 = 0$), on obtient

$$\iint_K \; dxdy = \oint_{\mathcal{C}^+} x \, dy \qquad \left(\text{resp. } \iint_K \; dxdy = \oint_{\mathcal{C}^+} -y \, dy\right).$$

Utiliser ce fait pour calculer l'aire d'une ellipse d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$.

5. Un champ électrique est donné par

$$\vec{B} = \left(e^x + 2y + \sin(x^2 z)\right) \vec{e}_1 + (12x + \arctan(yz))\, \vec{e}_2 + \cos(xyz)\vec{e}_3$$

Calculer la circulation de ce champ électrique le long de l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.
(Sugg. : remplacer l'intégrale curviligne par une autre)

6. On désire commercialiser un nouveau vide-pomme de section carrée de côté $2l$.On étudie la trace laissée par ce vide-pomme dans une pomme supposée parfaitement sphérique de rayon R lorsque le vide-pomme est parfaitement aligné sur le centre de la pomme (cf. FIG. 1 ci-dessous). On suppose que $R > \sqrt{2}l$, c'est-à-dire que « le vide-pomme est plus petit que la pomme ».

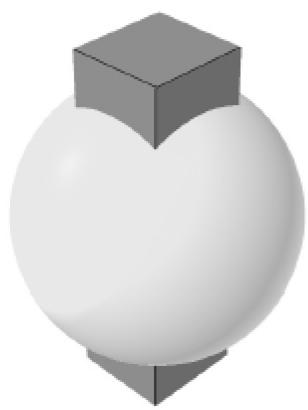

Figure 1 – Pomme traversée par le vide-pomme

(a) Calculer le périmètre de la découpe laissée par le vide-pomme de part et d'autre de la pomme.
(b) Si le rayon de la pomme mesure $\frac{3}{2}\sqrt{7}$ centimètres et que le côté de la section carrée du vide-pomme mesure $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ centimètres, calculer le périmètre de la découpe laissée par le vide-pomme de part et d'autre de la pomme.
(c) Donner une expression intégrale de la surface totale de la peau de la pomme ôtée par le vide-pomme.