



Année académique 2015-2016

Quelques notes relatives au cours MATH B' (MATH2013-1)

BLOC 1 PHYSIQUE

1 Table des matières et planning

Voir le document sur les pages web relatives au cours

2 Compléments relatifs au calcul matriciel (partie « algèbre linéaire »)

Ce qui suit constitue à la fois une suite et un complément relatifs au cours MathB du second quadrimestre et au cours de géométrie (bloc 1 physique).

2.1 Déterminants et dépendance linéaire

Théorème

On donne une matrice carrée. Pour celle-ci, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) le déterminant de la matrice est nul
- (b) les colonnes de la matrice sont des vecteurs linéairement dépendants
- (c) les lignes de la matrice sont des vecteurs linéairement dépendants.

Preuve. • (b) \Rightarrow (a) a été démontré (cf courB), de même que (c) \Rightarrow (a)

• (a) \Rightarrow (b) Démontrons à présent, par récurrence sur la dimension de la matrice, que l'annulation de son déterminant implique la dépendance linéaire des colonnes de celle-ci.

- Pour une matrice de dimension 1, on a $\det(a) = 0$ si et seulement si $a = 0$; comme le vecteur nul est linéairement dépendant, on conclut.

- Supposons à présent que la propriété soit vraie pour toute matrice de dimension n (avec $n \in \mathbb{N}_0$) et démontrons-la pour une matrice de dimension $n + 1$. Prenons donc une matrice A de dimension $n + 1$ dont le déterminant est nul et démontrons que les colonnes de A sont des vecteurs linéairement dépendants.

Notons C_1, \dots, C_{n+1} les colonnes de A . On a donc

$$A = (a_{jk})_{1 \leq j, k \leq n+1}, \quad C_k = (a_{jk})_{1 \leq j \leq n+1} \quad \forall k = 1, \dots, n+1.$$

Si $C_1 = 0$ alors les colonnes sont bien des vecteurs linéairement dépendants (car ...). Si $C_1 \neq 0$, un de ses éléments est non nul; quitte à permuter les lignes de A , nous pouvons supposer que $a_{11} \neq 0$ (car ...). Considérons alors les nouveaux vecteurs colonnes

$$C'_k = C_k - \frac{a_{1k}}{a_{11}} C_1, \quad \forall k = 2, \dots, n+1.$$

Pour tout $j = 1, \dots, n+1$, l'élément de la j -ème ligne de C'_k est donc égal à

$$a_{jk} - \frac{a_{1k}}{a_{11}} a_{j1}$$

et en particulier le premier élément de chaque C'_k est nul. Vu les propriétés des déterminants, on obtient

$$\det(A) = \det(C_1, C_2, \dots, C_{n+1}) = \det(C_1, C'_2, \dots, C'_{n+1}) = a_{11} \det \left(\left(a_{jk} - \frac{a_{1k}}{a_{11}} a_{j1} \right)_{2 \leq j, k \leq n+1} \right).$$

La matrice dont on prend le déterminant dans le membre de droite est de dimension n et son déterminant est nul. Par hypothèse, ses colonnes sont donc des vecteurs linéairement dépendants; il existe ainsi des coefficients r_2, \dots, r_{n+1} non tous nuls tels que

$$\sum_{k=2}^{n+1} r_k \left(a_{jk} - \frac{a_{1k}}{a_{11}} a_{j1} \right) = 0, \quad \forall j = 2, \dots, n+1.$$

On constate tout de suite que cette égalité reste correcte pour $j = 1$ également. On obtient ainsi

$$\sum_{k=2}^{n+1} r_k a_{jk} - \left(\sum_{k=2}^{n+1} r_k \frac{a_{1k}}{a_{11}} \right) a_{j1} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n+1$$

ou encore

$$\sum_{k=2}^{n+1} r_k C_k - \left(\sum_{k=2}^{n+1} r_k \frac{a_{1k}}{a_{11}} \right) C_1 = 0.$$

D'où la conclusion : les colonnes de A sont bien des vecteurs linéairement dépendants car on a obtenu une combinaison linéaire nulle de ceux-ci, à coefficients non tous nuls.

• (a) \Rightarrow (c) Si A est une matrice dont le déterminant est nul, alors le déterminant de sa transposée est nul aussi (car ...). Vu ce qui vient d'être fait, il en résulte que les colonnes de cette matrice sont des vecteurs linéairement dépendants ; les colonnes de la transposée étant les lignes de la matrice de départ, on en déduit (c). \square

2.2 La « formule de changement de base »

Pour les notions fondamentales concernant les espaces vectoriels de dimension finie, nous renvoyons au cours de géométrie de bloc 1 sciences physiques.

Soit un espace vectoriel E de dimension n et soient $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ (resp. $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$) deux bases de cet espace.

Si S est la matrice de dimension n dont les colonnes successives sont constituées des composantes des vecteurs \vec{e}'_j ($j = 1, \dots, n$) dans la base $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, alors, quel que soit le vecteur \vec{x} de E , on a

$$\boxed{X = SX'}$$

où X (resp. X') désigne le vecteur colonne dont les éléments sont les composantes de \vec{x} dans la base $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ (resp. dans la base $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$). Réciproquement, si on a une telle relation quel que soit \vec{x} , alors les colonnes de S sont nécessairement constituées de la manière décrite précédemment. Remarquons que S est inversible puisque ses colonnes sont des vecteurs linéairement indépendants.

Les propriétés qui précèdent se démontrent directement (cf aussi le cours de géométrie).

2.3 Opérateur linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même et changement de base

Rappelons la définition d'un opérateur linéaire T d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F : il s'agit d'une fonction $T : E \rightarrow F$ telle que l'image de toute combinaison linéaire d'éléments de E soit égale à la combinaison linéaire correspondante des images, c'est-à-dire

$$T\left(\sum_{j=1}^J r_j \vec{x}_j\right) = \sum_{j=1}^J r_j T\vec{x}_j$$

quels que soient $J \in \mathbb{N}_0$, les scalaires r_1, \dots, r_J et les éléments $\vec{x}_j \in E$ ($j = 1, \dots, J$).

Cela étant, soit un espace vectoriel E de dimension n et soit $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ une base de E .

Si A est la matrice de dimension n dont les colonnes successives sont constituées des composantes des images par T des vecteurs \vec{e}_j ($j = 1, \dots, n$) dans la base $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, alors, quel que soit le vecteur \vec{x} de E , on a

$$\boxed{Y = AX}$$

où X (resp. Y) désigne le vecteur colonne dont les éléments sont les composantes de \vec{x} (resp. $T\vec{x}$) dans la base $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. Réciproquement, si on a une telle relation quel que soit \vec{x} , alors les colonnes de A sont nécessairement constituées de la manière décrite précédemment.

On dit que la matrice A représente l'opérateur T dans la base $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.

A présent, examinons ce qui se passe sur la matrice qui représente un opérateur lorsqu'on change de base. On fixe ainsi une seconde base, notée $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$. Alors, quel que soit $\vec{x} \in E$, en utilisant ce qui vient d'être fait, on obtient

$$Y' = S^{-1}Y = S^{-1}AX = S^{-1}ASX'$$

où

- Y', X' (resp. Y, X) représentent les vecteurs colonnes des composantes de $T\vec{x}$, \vec{x} dans la base $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$ (resp. dans la base $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$),

- où A' (resp. A) représente T dans la base $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$ (resp. $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$)

- où S est la matrice qui permet de passer de la base $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ à la base $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$ comme expliqué précédemment.

Vu l'unicité des matrices de représentation des opérateurs, on en déduit que la matrice qui représente T dans la base $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$ est

$$\boxed{S^{-1}AS.}$$

On obtient ainsi l'interprétation de la diagonalisation d'une matrice carrée A représentant un opérateur linéaire dans une base : diagonaliser A , c'est trouver une nouvelle base dans laquelle l'opérateur est représenté par une matrice diagonale ; cette base est constituée de vecteurs propres de l'opérateur.

3 Compléments d'analyse

3.1 Compléments concernant les équations différentielles linéaires à coefficients constants

Pour une première étude de ces équations, nous renvoyons au cours « *Mathématique* » du premier quadrimestre du bloc 1 en sciences.

Rappelons qu'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre N est une équation différentielle qui s'écrit

$$a_N D^N f + a_{N-1} D^{N-1} f + \dots + a_1 Df + a_0 f = g$$

où les données sont $N \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{C}$, $a_N \neq 0$, $g \in C_0(]a, b[)$ et où l'inconnue est $f \in C_N(]a, b[)$.

Plusieurs choses ont déjà été vues et démontrées au premier quadrimestre, en tout cas pour $N = 1$ et $N = 2$. Nous allons apporter des compléments de démonstrations et d'informations à ce sujet.

3.1.1 Quelques remarques importantes sur ce qui a déjà été vu

Revenons sur le TAF et l'une de ses conséquences, qui affirme que « *si une fonction à valeurs réelles est dérivable sur un intervalle ouvert et si sa dérivée y est identiquement nulle, alors cette fonction est constante sur l'intervalle* ». Cette conséquence a effectivement été utilisée dans la résolution complète des équations différentielles d'ordre 1 (cf cours du Q1).

Deux remarques s'imposent : (a) l'hypothèse « *f à valeurs réelles* » est indispensable pour le TAF et (b) la propriété « *si une fonction à valeurs complexes est dérivable sur un intervalle ouvert et si sa dérivée y est identiquement nulle, alors cette fonction est constante sur l'intervalle* » est toujours vraie. Une justification est donnée ci-dessous.

- (a) On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x-i}$. On a $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ et

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{1+i} - \frac{1}{-i} = \frac{1-i}{2}, \quad Df(x) = -\frac{1}{(x-i)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Si le TAF était vrai pour des fonctions à valeurs complexes, alors il devrait exister $u \in]0, 1[$ tel que

$$\frac{1}{1+i} = -\frac{1}{(u-i)^2}.$$

Mais un petit calcul (en fait une ré-écriture de l'égalité ci-dessus) montre qu'en fait il ne peut pas exister de réel u vérifiant cette égalité !

- (b) Si $Df = 0$ sur l'intervalle I alors $D\Re f + iD\Im f = 0$ sur I , vu la linéarité de l'opérateur de dérivation. Cette égalité est équivalente à

$$\begin{cases} D\Re f = 0 \\ D\Im f = 0 \end{cases}, \quad \text{sur } I$$

donc il existe des constantes réelles r, r' telles que

$$\begin{cases} \Re f = r \\ \Im f = r' \end{cases}, \quad \text{sur } I.$$

Dès lors on a

$$f = \Re f + i\Im f = r + ir' \quad \text{sur } I$$

et on conclut.

3.1.2 Le cas $N = 1$

Le résultat suivant a été vu et démontré (cf premier quadrimestre)

L'ensemble des solutions de l'équation

$$a_1 Df + a_0 f = g$$

est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$\left(c + P(x) \right) e^{-\frac{a_0}{a_1} x}, \quad x \in]a, b[$$

où c est une constante arbitraire et où P est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{a_1} g(x) e^{\frac{a_0}{a_1} x}$

Dans cette forme générale des solutions, on retrouve bien la somme entre la solution générale de l'équation homogène ($x \mapsto ce^{-\frac{a_0}{a_1} x}$) et une solution particulière ($x \mapsto P(x)e^{-\frac{a_0}{a_1} x}$)

Lorsque g est une fonction de type « exponentielle-polynôme », la fonction $x \mapsto P(x)e^{-\frac{a_0}{a_1} x}$ prend une forme bien « agréable » ; nous avons déjà énoncé cette forme au premier quadrimestre ; à présent, nous allons effectuer le calcul de justification.

Prenons donc le cas

$$g(x) = Q(x) e^{\alpha x}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$ et où Q est un polynôme (en la variable x). Dans le calcul de P , deux cas se présentent clairement.

- $\alpha = -\frac{a_0}{a_1}$.

Dans ce cas, une primitive de $x \mapsto g(x)e^{\frac{a_0}{a_1} x} = Q(x)$ est clairement donnée par $x \mapsto xR(x)$ où R est un polynôme de même degré que Q . Une solution particulière est donc de la forme

$$x \mapsto xR(x)e^{\alpha x}$$

où R est un polynôme de même degré que celui de Q .

- $\alpha \neq -\frac{a_0}{a_1}$.

Dans ce cas, une primitivation par partie de la fonction $x \mapsto g(x)e^{\frac{a_0}{a_1} x} = Q(x)e^{(\alpha + \frac{a_0}{a_1})x}$ donne une primitive sous la forme $x \mapsto R(x)e^{(\alpha + \frac{a_0}{a_1})x}$ où R est un polynôme de même degré que Q . Une solution particulière est donc de la forme

$$x \mapsto R(x)e^{\alpha x}$$

où R est un polynôme de même degré que celui de Q .

3.1.3 Le cas $N = 2$

Dans ce cadre, l'énoncé donnant la forme générale des solutions de l'équation homogène a été vu au cours du premier quadrimestre et la vérification du fait que les fonctions données étaient bien solutions a été laissée à titre d'exercices. Dans le cadre présent, nous allons démontrer la réciproque, à savoir qu'une solution de l'équation différentielle homogène a bien la forme d'une combinaison linéaire d'exponentielles-polynômes bien spécifiques comme énoncé au premier quadrimestre (et traité dans des exercices et des applications).

Dans la suite, nous considérons donc des équations du type (avec données et inconnues comme annoncé plus haut)

$$a_2 D^2 f + a_1 Df + a_0 = 0.$$

Notons z_1 et z_2 les solutions de l'équation caractéristique $a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$

Commençons par une petite manipulation d'opérateurs linéaires de dérivation.

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle et si a est un complexe, la fonction $x \mapsto Df(x) - af(x)$ est souvent notée $x \mapsto (D - a)f(x)$, montrant ainsi qu'elle résulte de l'application de l'opérateur $D - a$ à la fonction f . Si b est aussi un complexe, composer les opérateurs $D - a$ et $D - b$ revient à appliquer successivement ces opérateurs à¹ f (deux fois dérivable).

Cela étant, un simple calcul montre que

$$a_2 D^2 f + a_1 Df + a_0 f = a_2 (D - z_1)(D - z_2)f \quad (*)$$

pour toute fonction f deux fois dérivable sur un intervalle.

Venons-en maintenant à la preuve du fait qu'une solution de l'équation homogène a bien la forme annoncée (cf cours du Q1). Prenons donc une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I telle que

$$a_2 D^2 f + a_1 Df + a_0 f = 0 \quad \text{sur } I.$$

Définissons alors la fonction F sur I par

$$F = Df - z_2 f.$$

Comme f est solution de l'équation homogène de départ, vu (*), cette fonction F vérifie l'équation homogène d'ordre 1

$$DF - z_1 F = 0.$$

Il s'ensuit qu'il existe une constante c_1 telle que

$$F(x) = c_1 e^{z_1 x}, \quad x \in I.$$

Vu la définition de F , on obtient donc que f vérifie l'équation non homogène d'ordre 1 suivante

$$Df(x) - z_2 f(x) = c_1 e^{z_1 x}, \quad x \in I$$

Il s'ensuit qu'il existe une constante c_2 telle que

$$f(x) = \left(c_2 + P(x) \right) e^{z_2 x}$$

où P est une primitive de $x \mapsto c_1 e^{z_1 x} e^{-z_2 x}$. On trouve donc bien l'ensemble des solutions de l'équation de départ tel qu'annoncé au cours du Q1, à savoir

- lorsque $z_1 = z_2$, l'ensemble des fonctions

$$(c_1 x + c_2) e^{z_2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires

- lorsque $z_1 \neq z_2$, l'ensemble des fonctions

$$c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires. \square

1. cela revient donc à généraliser la composition de fonctions

3.1.4 Le cas $N \geq 3$

Par récurrence ou en utilisant un procédé qui permet de traiter le cas de l'ordre N directement, on démontre le résultat suivant, concernant l'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$a_N D^N f + a_{N-1} D^{N-1} f + \dots + a_1 Df + a_0 f = 0$$

où les données sont $N \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{C}$, $a_N \neq 0$ et où l'inconnue est f .

Ici encore, le polynôme de degré N $z \mapsto a_N z^N + \dots + a_1 z + a_0$ s'appelle *polynôme caractéristique* associé à l'équation différentielle et l'équation polynomiale correspondante s'appelle *équation caractéristique*.

Théorème

Soient z_1, \dots, z_J les zéros distincts du polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle ci-dessus et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_J$ leurs multiplicités respectives. Alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$\sum_{j=1}^J Q_j(x) e^{z_j x}$$

où, pour tout $j = 1, \dots, J$, Q_j est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\alpha_j - 1$.

Chaque polynôme Q_j fait apparaître α_j constantes (à savoir les coefficients des puissances naturelles de la variable); dès lors, la solution générale fait intervenir $\sum_{j=1}^J \alpha_j = N$ constantes arbitraires.

3.2 Quelques autres équations différentielles

Il sera utile de se rappeler la notion de changement de variables régulier entre deux intervalles ouverts de la droite réelle. Pour cela, nous renvoyons au cours du Q1 et à la sous-section consacrée au « *Théorème pratique de la fonction inverse* ».

Des exemples de telles équations, ainsi que des exercices résolus, sont déjà disponibles dans le syllabus du cours du premier quadrimestre, à la fin du chapitre consacré aux équations différentielles.

3.2.1 Equations d'ordre 1 « à second membre linéaire »

Il s'agit d'équation du type

$$Df = af + b$$

où f est l'inconnue, et a, b des fonctions continues sur un intervalle ouvert. Lorsque b est nul, on dit que l'équation est homogène. Ce type d'équation généralise donc les équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1! Nous allons voir qu'en fait, l'ensemble des solutions est aussi tout à fait analogue.

Tout d'abord, il est immédiat de vérifier (comme on le fait dans le cas des équations différentielles linéaires à coefficients constants) que toute solution est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène, et réciproquement.

Déterminons à présent l'ensemble des solutions.

Ensemble des solutions

L'ensemble des solutions de l'équation

$$Df = af + b$$

est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$\left(c + P(x) \right) e^{A(x)}, \quad x \in I$$

où c est une constante arbitraire, où A est une primitive de la fonction a et où P est une primitive de la fonction $x \mapsto b(x)e^{-A(x)}$

Preuve. Tout d'abord, remarquons que toute fonction de la forme indiquée est une solution de l'équation : on vérifie en effet directement que la fonction

$$x \mapsto ce^{A(x)}$$

est solution de l'équation homogène (sur I) et que la fonction

$$x \mapsto P(x) e^{A(x)}$$

est une solution de l'équation (sur I).

Cela étant, on procède comme dans le cas des équations à coefficients constants. Soit une solution, notée f , de l'équation homogène de départ. On définit

$$F(x) = f(x)e^{-A(x)}, \quad x \in I.$$

On a $F \in C_1(I)$ et

$$DF(x) = Df(x)e^{-A(x)} - f(x)a(x)e^{-A(x)} = (Df(x) - f(x)a(x)) e^{-A(x)} = 0, \quad x \in I;$$

dès lors, il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $F(x) = c$ pour tout $x \in I$ donc telle que

$$f(x) = ce^{A(x)}, \quad x \in I.$$

Et on peut conclure. \square

3.2.2 Les équations dites « Equations d'Euler »

Commençons par donner la notation habituelle de l'opérateur qui intervient ici. Il s'écrit " xD " si on utilise la notation x pour la variable et il est défini par $(xD) : f \mapsto xDf(x)$ si f est dérivable sur un intervalle ouvert.

Cela étant, nous pouvons donner la définition du type d'équation dont il va être question dans cette sous-section : le « Equations d'Euler » sont des équations différentielles du type (la variable est notée x)

$$a_N(xD)^N f + a_{N-1}(xD)^{N-1} f + \dots + a_1(xD)f + a_0 f = g \quad (E)$$

où les données sont $N \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{C}$, $a_N \neq 0$, $g \in C_0(]a, b[)$ et où l'inconnue est $f \in C_N(]a, b[)$. Ces équations sont linéaires (cela signifie que toute combinaison linéaire de solutions de l'équation homogène est encore solution de l'équation homogène) mais elles ne sont plus à coefficients constants ! Pourtant, leur définition montre qu'elles sont fort semblables à

celles-ci; et de fait, par changement de variable, on va voir que résoudre une telle équation revient à résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Propriété de l'opérateur xD

Si $k \in \mathbb{N}_0$, on a

$$((xD)^k f)(x) = \left((D^k F) \circ \ln \right) (x) = \left(D^k F \right) (\ln(x)), \quad x \in I$$

avec $f \in C_k(]a, b[)$, $I =]a, b[\subset]0, +\infty[$ et $F = f \circ \exp$.

Preuve. La fonction F est définie sur

$$J = \left\{ x \in \mathbb{R} : e^x \in]a, b[\right\} =]\ln(a), \ln(b)[$$

et elle est aussi k fois continûment dérivable sur cet intervalle J ; il s'ensuit que la fonction $D^k F \circ \ln$ est bien définie sur I . Les deux membres de l'égalité sont donc des fonctions définies sur I .

Cela étant, la preuve de cette égalité peut s'effectuer par récurrence sur k .

- Pour $k = 1$, on a

$$DF(y) = Df(e^y) e^y, \quad y \in J$$

donc

$$DF(\ln(x)) = xDf(x) = (xD)f(x), \quad x \in I.$$

- Supposons maintenant que l'égalité soit vraie pour le naturel k et démontrons qu'elle reste vraie pour $k + 1$. On a

$$\left(D^{k+1} F \right) (\ln(x)) = x D \left(\left(D^k F \right) (\ln(x)) \right), \quad x \in I;$$

l'hypothèse de récurrence permet alors d'obtenir immédiatement

$$\left(D^{k+1} F \right) (\ln(x)) = x D \left((xD)^k f(x) \right) = (xD)^{k+1} f(x), \quad x \in I.$$

□

Résolution des équations d'Euler

On reprend les notations et hypothèses énoncées plus haut et on pose $I =]a, b[$. Alors la fonction $f \in C_N(I)$ vérifie l'équation

$$a_N (xD)^N f + a_{N-1} (xD)^{N-1} f + \dots + a_1 (xD) f + a_0 f = g \quad \text{sur } I$$

si et seulement si il existe une fonction $F \in C_N(J)$ telle que

$$a_N D^N F + a_{N-1} D^{N-1} F + \dots + a_1 DF + a_0 F = g \circ \exp \quad \text{sur } J =]\ln(a), \ln(b)[$$

et

$$f = F \circ \ln$$

Preuve. Supposons que $f \in C_N(I)$ vérifie l'équation

$$a_N (xD)^N f + a_{N-1} (xD)^{N-1} f + \dots + a_1 (xD) f + a_0 f = g$$

sur I . Alors la fonction $F = f \circ \exp \in C_N(J)$ est telle que

$$a_N(D^N F)(\ln(x)) + a_{N-1}(D^{N-1} F)(\ln(x)) + \dots + a_1(DF)(\ln(x)) + a_0 F(\ln(x)) = g(x), \quad x \in I$$

donc

$$a_N D^N F + a_{N-1} D^{N-1} F + \dots + a_1 DF + a_0 F = g \circ \exp$$

sur J et on a bien $f = F \circ \ln$.

Réciproquement, supposons que $F \in C_N(J)$ vérifie l'équation

$$a_N D^N F + a_{N-1} D^{N-1} F + \dots + a_1 DF + a_0 F = g \circ \exp$$

sur J . Alors on a aussi

$$a_N(D^N F)(\ln(x)) + a_{N-1}(D^{N-1} F)(\ln(x)) + \dots + a_1(DF)(\ln(x)) + a_0 F(\ln(x)) = g(x), \quad x \in I$$

donc $f = F \circ \exp \in C_N(I)$ et on a

$$a_N(xD)^N f + a_{N-1}(xD)^{N-1} f + \dots + a_1(xD)f + a_0 f = g$$

sur I . \square

Autre expression des équations d'Euler

Une égalité du type (E) peut aussi s'écrire sous la forme

$$b_N x^N D^N f + b_{N-1} x^{N-1} D^{N-1} f + \dots + b_1 x Df + b_0 f = g$$

où $b_0, \dots, b_N \in \mathbb{C}$ et $b_N \neq 0$. Et réciproquement.

Preuve. Nous allons démontrer que, (*) quel que soit le naturel non nul k , il existe des coefficients réels $r_{k,j}$ ($1 \leq j \leq k$) avec $r_{k,k} = 1$ tels que

$$(xD)^k = \sum_{j=1}^k r_{k,j} x^j D^j.$$

La justification de l'équivalence annoncée est alors immédiate dans un sens et s'obtient directement par récurrence dans l'autre sens.

Procédons par récurrence pour démontrer (*). Le cas $k = 1$ est évident. Supposons donc que

$$(xD)^k = \sum_{j=1}^k r_{k,j} x^j D^j$$

avec $r_{k,j}$ ($1 \leq j \leq k$) et $r_{k,k} = 1$. Si $f \in C_{k+1}(]a, b[)$, on a

$$\begin{aligned} (xD)^{k+1} f(x) &= (xD)(xD)^k f(x) = (xD) \sum_{j=1}^k r_{k,j} x^j D^j f(x) \\ &= x \sum_{j=1}^k r_{j,k} \left(j x^{j-1} D^j f(x) + x^j D^{j+1} f(x) \right) \\ &= \sum_{j=1}^k r_{j,k} \left(j x^j D^j f(x) + x^{j+1} D^{j+1} f(x) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^k r_{j,k} j x^j D^j f(x) + \sum_{j=2}^{k+1} r_{j-1,k} x^j D^j f(x) \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} s_{j,k+1} x^j D^j f(x)
\end{aligned}$$

avec

$$s_{1,k+1} = r_{1,k}, \quad s_{j,k+1} = j r_{j,k} + r_{j-1,k} \quad \text{pour } j = 2, \dots, k, \quad s_{k+1,k+1} = r_{k,k};$$

d'où la conclusion. \square

3.2.3 Equations dites « exactes »

Avertissement quant aux justifications...

Il s'agit ici d'équations du type

$$Df(x) = -\frac{D_1 U(x, f(x))}{D_2 U(x, f(x))}, \quad x \in I$$

où les données sont un intervalle ouvert I , une fonction $U \in C_1(I \times \mathbb{R})$ et où $f \in C_1(I)$ est l'inconnue.

En utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées, on obtient directement que f vérifie cette équation si et seulement s'il existe une constante c telle que

$$U(x, f(x)) = c, \quad x \in I.$$

La fonction f est donc donnée implicitement; une expression explicite est souvent difficile à obtenir.

3.2.4 Equations dites « à second membre séparé »

Avertissement quant aux justifications...

Il s'agit ici d'équations du type

$$Df(x) = g(x)G(f(x)), \quad x \in I$$

où les données sont un intervalle ouvert I , une fonction $g \in C_0(I)$, une fonction $G \in C_0(J)$ et où $f \in C_1(I)$ tel que $im(f) \subset J$ est l'inconnue.

Remarquons que nous avons déjà rencontré ce type d'équation au premier quadrimestre (évolution de population en présence d'un facteur « limitant »).

Méthode de résolution.

- Si $G(y_0) = 0$ alors $f = y_0$ est une solution.
- Si f est une solution sur I telle que $G(f(x)) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors

$$g(x) = \frac{D_x f(x)}{G(f(x))} = D(G_0 \circ f)(x), \quad x \in I$$

où G_0 est une primitive de $1/G$. Si g_0 est une primitive de g , on obtient donc

$$G_0(f(x)) = g_0(x) + c, \quad x \in I$$

où c est une constante. Si G_0 est bijectif, alors

$$f(x) = G_0^{-1}(g_0(x)), \quad x \in I.$$

Réciproquement, si G_0 est une primitive de $1/G$, est bijectif, et si g_0 est une primitive quelconque de g , alors

$$f(x) = G_0^{-1}(g_0(x)), \quad x \in I$$

convient.

3.2.5 Equations dites « à second membre homogène »

Avertissement quant aux justifications...

Il s'agit d'équations différentielles qui s'écrivent

$$Df(x) = F\left(\frac{f(x)}{x}\right), \quad x \in I$$

où la donnée est $F \in C_0(]a, b[)$ et où $f \in C_1(I)$ et $I =]a, b[$ quel que soit $x \in I$ sont les inconnues.

Méthode de résolution.

- Si $F(y) = y$ alors on est dans le cas d'une équation à second membre séparé (et aussi linéaire homogène, et aussi d'Euler)
- En toute généralité, on introduit la fonction auxiliaire $h(x) = f(x)/x$. L'équation devient alors

$$D_x h(x) = \frac{F(h(x)) - h(x)}{x}$$

qui est une équation à second membre séparé.

3.3 Intégrales paramétriques

Les intégrales paramétriques (et leur dérivation) représentent un outil très important de l'analyse. Elles apparaissent notamment dans le cadre de l'*analyse de Fourier* et du *produit de convolution de fonctions*.

Dans le présent cours, nous ne considérerons ces intégrales que dans le cas de l'intégration à une variable et dans le cas d'un seul paramètre réel.

Comme leur nom l'indique déjà, les « intégrales paramétriques » sont des fonctions qui sont définies par des intégrales, comme suit

$$\lambda \mapsto \int_A f(x, \lambda) dx.$$

Dès le départ, il convient de fixer un cadre qui donne sens à cette définition :

- A est un sous-ensemble de \mathbb{R} (le plus souvent un intervalle) ; le paramètre λ varie dans un sous-ensemble de \mathbb{R} également, noté par exemple Λ , et qui sera considéré ouvert lorsqu'il sera question de dérivation
- f est une fonction définie sur le produit cartésien $A \times \Lambda$ et, pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fonction $x \mapsto f(x, \lambda)$ est intégrable sur A .

Enonçons à présent le « Théorème des intégrales paramétriques » dans le cas d'une seule dérivation.

Théorème de « Dérivation des intégrales paramétriques » (Admis)

On reprend les notations et les hypothèses naturelles ci-dessus. En outre, on suppose que

- quel que soit $x \in A$, la fonction $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ appartient à $C_1(\Lambda)$
- quel que soit $\lambda \in \Lambda$, la fonction $x \mapsto f(x, \lambda)$ est intégrable sur A
- (*) quel que soit l'ensemble borné fermé K inclus dans l'ouvert Λ , il existe une fonction g_K intégrable sur A telle que

$$|D_\lambda f(x, \lambda)| \leq g_K(x), \quad \forall x \in A, \forall \lambda \in K$$

Sous ces conditions, la fonction $\lambda \mapsto \int_A f(x, \lambda) dx$ appartient à $C_1(\Lambda)$ et « on peut dériver sous le signe intégral », ce qui signifie que

$$D_\lambda \int_A f(x, \lambda) dx = \int_A D_\lambda f(x, \lambda) dx, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Remarques

1) Lorsque $f \in C_1(A' \times \Lambda)$ avec A' ouvert contenant A et lorsque A est borné et fermé, l'hypothèse (*) est automatiquement satisfaite.

2) Pour n dérivations (n naturel strictement plus grand que 1), on demande que $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ appartienne à $C_n(\Lambda)$, que les dérivées (par rapport à λ) jusqu'à l'ordre $n - 1$ soient intégrables sur A et que la majoration qui apparaît dans (*) fasse intervenir $D_\lambda^n f(x, \lambda)$. On obtient alors que la fonction $\lambda \mapsto \int_A f(x, \lambda) dx$ appartient à $C_n(\Lambda)$ et que la dérivation s'effectue encore de la même manière (jusqu'à l'ordre n).

3.4 Analyse vectorielle

Dans cette section, nous allons rappeler les définitions des opérateurs gradient, divergence, rotationnel, la définition d'une courbe, la définition d'une surface. Diverses notions qui y sont liées seront aussi introduites.

Ensuite, les intégrales curviligne, sur une courbe, sur une surface seront définies et des « égalités fondamentales » liant ces intégrales et faisant intervenir les opérateurs gradient, divergence, rotationnel seront énoncées.

Les notes dans la suite ici sont tirées d'un syllabus d'un autre cours ; elles serviront de base aux exposés mais toute la matière qui y figure ne sera pas vue.

Chapitre 2

Analyse vectorielle

Références du chapitre - Partie I

Théorie

- Dans le EK (livre de référence) : paragraphes 9.4, 9.5, 9.7, 9.8, 9.9.
- le cours (compléments importants au livre)

Exercices

- Exercices du EK (se trouvant à la fin des sections et à la fin du chapitre).
- Liste(s) d'exercices disponible(s) sur le site du service : <http://www.afo.ulg.ac.be/>

2.1 Notions fondamentales (considérées vues)

- addition de deux vecteurs et multiplication d'un vecteur par un scalaire
- produit scalaire de 2 vecteurs et produit vectoriel de 2 vecteurs
- notion de base (du plan, de l'espace) et de composantes d'un vecteur dans une base
- notion de projection orthogonale (sur une droite vectorielle ou sur un plan vectoriel) et expressions pratiques pour les déterminer
- diverses expressions analytiques : longueur d'un vecteur (norme), produit scalaire de deux vecteurs, produit vectoriel de 2 vecteurs.

2.1.1 Notations

Les vecteurs s'écrivent : \vec{v} ou \mathbf{v} ou \underline{v}

Les composantes – réelles dans cette partie du cours – sont notées entre crochets :

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$$

Les coordonnées d'un point sont notées entre parenthèses (x_1, x_2, x_3) .

Le produit scalaire : $\vec{a} \bullet \vec{b}$

Le produit vectoriel : $\vec{a} \times \vec{b}$ ou $\vec{a} \wedge \vec{b}$

2.2 Fonctions vectorielles, champs vectoriels

Champ scalaire

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{ou } \mathbb{C})$$

Exemple La distance entre deux points est un champ scalaire :

$$f(P) = \text{dist}(P_0; P) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

où (x, y, z) sont les coordonnées de P et (x_0, y_0, z_0) sont les coordonnées de P_0 , un point fixé.

Représentation On prend l'habitude de représenter un champ scalaire par des surfaces équipotentielles (ou des courbes de niveau).

Champ vectoriel

$$\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (n = 2, 3 \text{ et } m = 1, 2, 3)$$

Exemple : A tout instant t fixé, la vitesse de rotation d'un corps de l'espace autour d'un axe donne un exemple de champ vectoriel.

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega \vec{e}_3 \\ \vec{f}(x, y, z) &= \vec{v}(x, y, z) \\ &= \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = \omega \vec{e}_3 \wedge (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) \\ &= \omega(-y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2) \\ &= \omega[-y, x, 0] \end{aligned}$$

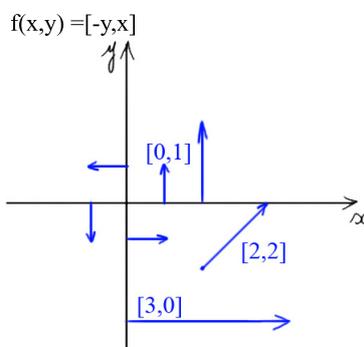


FIGURE 2.1 – Représentation du champ $\vec{f} = [-y, x]$ dans le plan du mouvement (vue du dessus)

Remarque : Il faut bien remarquer qu'au vu des conventions, on a

$\vec{f}(x, y, z) = [f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)]$ où f_1, f_2, f_3 sont des champs scalaires.

Différence entre un champ vectoriel (resp. scalaire) et une fonction vectorielle (resp. scalaire)

Un champ vectoriel est une application définie en tout point de l'espace (ou du plan). C'est donc une loi qui dépend des points (\approx champ physique). En pratique, on se sert des coordonnées des points et/ou des composantes des vecteurs pour transformer les champs vectoriels en fonctions vectorielles, i.e. des lois définies sur un ensemble de (x, y, z) (ou plus si on travaille dans \mathbb{R}^n). Et il faut donc normalement étudier l'indépendance de ces lois vis-à-vis du système d'axes (ou de la base) employés si on veut être certain que les propriétés trouvées ne dépendent que du point, et non de la base/repère choisis.

Un champ vectoriel peut donc être interprété comme une « entité physique » et la fonction vectorielle comme « le modèle mathématique » qui exprime cette entité physique. À partir du moment où la fonction vectorielle ne dépend pas du système d'axes, on l'appelle champ vectoriel sans distinction.

Des exemples de démonstration de l'indépendance d'une fonction vectorielle (en particulier les opérateurs vectoriels) par rapport à un système d'axes se trouvent dans la section 9.9 Annexe 4 du EK.

2.2.1 Notion de dérivation

Les fonctions **vectorielles** sont en fait des fonctions d'une ou plusieurs variables réelles à valeur dans \mathbb{R}^n avec $n = 2, 3$. Dès lors on applique la notion de dérivée et de dérivée partielle à des composantes de \vec{f} (dans le cas d'un champ vectoriel).

Par exemple, si $\vec{f}(x, y, z) = [f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)]$, la dérivée selon x est :

$$D_x \vec{f} = [D_x f_1(x, y, z), D_x f_2(x, y, z), D_x f_3(x, y, z)]$$

Ou encore : $\vec{f}(t) = [f_1(t), f_2(t), f_3(t)]$ dont la dérivée donne simplement

$$D\vec{f}(t) = [Df_1(t), Df_2(t), Df_3(t)]$$

Dérivées de produits

Dans le cas de la dérivée d'un produit d'une fonction scalaire et d'une fonction vectorielle :

$$\begin{aligned} D(\alpha(t) \cdot \vec{f}(t)) &= [\alpha' f_1 + \alpha f_1', \alpha' f_2 + \alpha f_2', \alpha' f_3 + \alpha f_3'] \\ &= [\alpha' f_1, \alpha' f_2, \alpha' f_3] + [\alpha f_1', \alpha f_2', \alpha f_3'] \\ &= D\alpha \cdot \vec{f} + \alpha \cdot D\vec{f} \end{aligned}$$

Tous les cas de produits vectoriels, produits scalaires se font selon la règle de dérivation des produits et peuvent être retrouvés par le même genre de développement que ci-dessus.

Produit vectoriel

$$D(\vec{g}(t) \wedge \vec{f}(t)) = D\vec{g} \wedge \vec{f} + \vec{g} \wedge D\vec{f}$$

En particulier, si \vec{f} est constant, on a

$$D(\vec{g}(t) \wedge \vec{f}(t)) = D\vec{g} \wedge \vec{f}$$

Produit scalaire

$$D(\vec{g}(t) \bullet \vec{f}(t)) = D\vec{g} \bullet \vec{f} + \vec{g} \bullet D\vec{f}$$

En particulier, si \vec{f} est constant, on a

$$D(\vec{g}(t) \bullet \vec{f}(t)) = D\vec{g} \bullet \vec{f}$$

2.2.2 Exemples courants de fonctions vectorielles

Les fonctions vectorielles les plus utilisées sont les « chemins » et les « couvertures ». Ces fonctions consistent en un paramétrage respectivement de courbes et de surfaces.

La section 2.5 vous permettra de découvrir ces exemples particuliers.

2.3 Opérateurs vectoriels

2.3.1 Le gradient

Soit un champ scalaire $f : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}$ (Ω ouvert de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3).

Le gradient de f est le champ vectoriel :

$$\begin{aligned}(x, y, z) \mapsto \mathbf{grad} f = \vec{\nabla} f &= \left[D_x f(x, y, z), D_y f(x, y, z), D_z f(x, y, z) \right] \\ &= D_x f(x, y, z)\vec{e}_1 + D_y f(x, y, z)\vec{e}_2 + D_z f(x, y, z)\vec{e}_3\end{aligned}$$

où $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ désigne une base orthonormée de l'espace \mathbb{R}^3 .

Le gradient est donc un opérateur qui transforme un champ scalaire en un champ vectoriel.

NB : Le gradient d'un champ scalaire est une fonction vectorielle indépendante de la base orthonormée de l'espace dans lequel il est exprimé (voir EK p405 - Théorème 1), le gradient est donc un champ vectoriel.

Remarques

- La dérivée directionnelle de f dans la direction de \vec{h} au point (x_0, y_0, z_0) est $\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \bullet \frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}$ (c.f. rappels).
- Soit une surface \mathcal{S} d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$. Pour un point (x_0, y_0, z_0) ¹ par lequel passe une courbe qui est incluse dans la surface, on a $\forall t$ voisin de t_0

$$F(t) = f(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

donc

$$0 = DF(t_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \bullet [\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)]$$

Le gradient est donc orthogonal à la surface.

Exemples : Déterminer le gradient des fonctions scalaires données explicitement par $f(x, y, z) = x.e^y + z$ et $f(x, y, z) = \frac{1}{r}$ où $r = \text{dist}(O, P(x, y, z))$.

1. Avec $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0$

2.3.2 La divergence

Soit un champ vectoriel $\vec{f} \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ (Ω ouvert $\subset \mathbb{R}^n$)

La divergence de $\vec{f} = [f_1, f_2, f_3]$ est le champ scalaire :

$$(x, y, z) \mapsto \operatorname{div} \vec{f} = D_x f_1 + D_y f_2 + D_z f_3 = \vec{\nabla} \bullet \vec{f}$$

Remarques :

- $\operatorname{div} \vec{f} = \vec{\nabla} \bullet \vec{f}$. Cette dernière égalité indique en fait une notation et n'est pas le produit scalaire de deux vecteurs. Cependant, vu la définition, on peut faire "comme si" c'était le produit scalaire de f et du "vecteur gradient".
- La divergence représente par exemple le rapport entre le flux entrant et sortant d'une membrane.
- Calcul de la divergence de $\vec{v}(x, y, z) = [3xy, 2xy, -yz^2]$ on a : $\operatorname{div} \vec{v} = 3y + 2x - 2yz$.
- La divergence est un opérateur qui transforme un champ vectoriel en un champ scalaire.
- La divergence d'un champ vectoriel est une fonction scalaire indépendante du système d'axes dans lequel elle est calculée (voir EK p 411), c'est pour cela que cette fonction scalaire porte le nom de champ scalaire.

2.3.3 Le rotationnel

Soit un champ vectoriel $\vec{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ (Ω ouvert $\subset \mathbb{R}^3$)

Le rotationnel de \vec{f} est le champ vectoriel :

$$\operatorname{rot} \vec{f}(x, y, z) = \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = (D_y f_3 - D_z f_2) \vec{e}_1 + (D_z f_1 - D_x f_3) \vec{e}_2 + (D_x f_2 - D_y f_1) \vec{e}_3$$

Remarques :

- Le rotationnel est un opérateur qui transforme un champ vectoriel en un champ vectoriel.
- Par exemple : le rotationnel est un vecteur parallèle à l'axe de rotation et de module égal à la vitesse angulaire de rotation. Il décrit donc la manière dont un corps tourne autour d'un axe.
- $\vec{v}(x, y, z) = [xy, 3zx, z]$ a pour rotationnel : $\operatorname{rot} \vec{v} = -3x \vec{e}_1 + (3z - x) \vec{e}_3$
- Si vous avez un champ à valeurs dans \mathbb{R}^2 et dont vous voulez connaître le rotationnel dans \mathbb{R}^3 , vous considérez simplement que la dernière composante de \vec{f} est nulle.
- A un point de l'espace représenté par ses coordonnées, le rotationnel associe un vecteur dont la longueur et la direction sont indépendantes du système d'axes dans lequel les coordonnées sont considérées (voir EK p416) ; c'est donc un champ vectoriel.

2.4 Relations importantes entre les opérateurs vectoriels

1. Si $\alpha : \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R}$, alors

$$\mathbf{rot}(\vec{\nabla}\alpha) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\alpha = \vec{0} \text{ dans } \Omega$$

Preuve

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\alpha &= [\underbrace{D_x\alpha}_{f_1}, \underbrace{D_y\alpha}_{f_2}, \underbrace{D_z\alpha}_{f_3}] \\ \mathbf{rot}\vec{\nabla}\alpha &= [D_y D_z \alpha - D_z D_y \alpha, D_z D_x \alpha - D_x D_z \alpha, D_x D_y \alpha - D_y D_x \alpha] \\ &= \vec{0} \text{ car nous avons supposé } \alpha \text{ de classe } C_2 \end{aligned}$$

2. Si $\vec{f} : \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R}^3$, alors

$$\operatorname{div}(\mathbf{rot}\vec{f}) = \vec{\nabla} \bullet (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) = 0 \text{ dans } \Omega$$

Preuve

La preuve de cette propriété peut être obtenue par un raisonnement similaire à celui fait ci-dessus.

Théorèmes de primitivation

Nous avons deux relations qui sont toujours vraies pour un ouvert Ω quelconque, est-il possible de leur trouver une réciproque ?

$$\begin{aligned} \text{Si } \mathbf{rot}\vec{f} = \vec{0} &\implies \exists ? \alpha \text{ tel que } \mathbf{grad}\alpha = \vec{\nabla}\alpha = \vec{f} \\ \text{Si } \operatorname{div}\vec{b} = 0 &\implies \exists ? \vec{f} \text{ tel que } \mathbf{rot}\vec{f} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \vec{b} \end{aligned}$$

Parfois mais pas toujours!!

Remarque : L'utilisation de ces résultats :

Il est important de savoir quand un champ vectoriel dérive d'un potentiel : les intégrales faisant intervenir ces divers éléments représentent/modélisent des situations concrètes.

On revient plus loin sur le cas d'un champ vectoriel dérivant d'un potentiel scalaire dans le cadre des intégrales curvilignes et des fonctions holomorphes.

2.4.1 Théorèmes de primitivation : Réciproque 1

Exemple montrant qu'il n'existe pas toujours une fonction convenant :

Soit $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ et la fonction de classe C_∞

$$f = \left[\underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2}}_{f_1}, \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{f_2}, 0 \right]$$

on a bien le rotationnel de ce champ nul :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \vec{f} &= \left[0, 0, D_x\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - D_y\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \right] \\ &= \left[0, 0, \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ &= \vec{0} \quad \forall (x, y, z) \in \Omega \end{aligned}$$

Par l'absurde, supposons qu'il existe une fonction scalaire

$$\alpha : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R} \text{ telle que } \mathbf{grad} \alpha = \vec{f} \text{ dans } \Omega \Leftrightarrow [D\alpha_1, D\alpha_2, D\alpha_3] = [f_1, f_2, f_3]$$

Définissons $F(\theta) = \alpha(\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. On calcule la dérivée de la fonction F par le théorème de dérivation des fonctions composées.

$$\begin{aligned} D_\theta F(\theta) = D_\theta \alpha(\cos \theta, \sin \theta, 0) &= D_\theta \alpha_1(\cos \theta, \sin \theta, 0) \cdot (-\sin \theta) + D_\theta \alpha_2(\cos \theta, \sin \theta, 0) \cdot \cos \theta \\ &= f_1(\cos \theta, \sin \theta, 0) \cdot (-\sin \theta) + f_2(\cos \theta, \sin \theta, 0) \cdot \cos \theta \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= 1 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

D'autre part on a aussi :

$$I = \int_0^{2\pi} D_\theta F d\theta = F(2\pi) - F(0) = \alpha(1, 0, 0) - \alpha(1, 0, 0) = 0$$

Mais nous avons trouvé que la dérivée de F valait 1 en supposant qu' α répondait à la question, donc on obtient aussi

$$I = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi$$

Ce qui conduit à une absurdité. Il n'existe donc pas de fonction scalaire $\alpha : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}$ telle que $\mathbf{grad} \alpha = \vec{f}$ dans Ω

Sous quelles hypothèses la propriété est-elle correcte ?

Un ouvert Ω de \mathbb{R}^n est dit étoilé par rapport à un point x_0 ($\in \Omega$) si

$$\forall x \in \Omega, \text{ le segment } \{(1-t)x_0 + tx : t \in [0, 1]\} \text{ est inclus dans } \Omega$$

Quelques remarques : notez la différence entre un ouvert étoilé et un connexe ou un convexe.

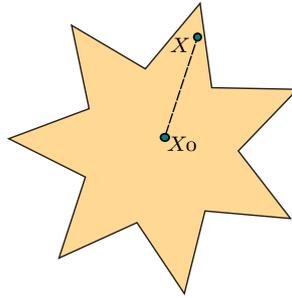


FIGURE 2.2 – Ouvert étoilé

- étoilé \Rightarrow connexe, connexe $\not\Rightarrow$ étoilé.
- étoilé $\not\Rightarrow$ convexe, convexe \Rightarrow étoilé.
- convexe \Rightarrow connexe, connexe $\not\Rightarrow$ convexe.

Théorème

Soit Ω un ouvert étoilé par rapport à x_0 et soient $f_1, \dots, f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C_1 .
 Alors il existe $\alpha \in C_2(\Omega)$ tel que $D_{x_j}\alpha = f_j, \forall j \Leftrightarrow$ les f_j vérifient les égalités croisées, à savoir

$$D_{x_j}f_k = D_{x_k}f_j \quad \forall j, k = 1, \dots, n$$

Dans \mathbb{R}^3 , la condition sur les dérivées s'écrit :

$$D_1f_2 = D_2f_1 \text{ et } D_1f_3 = D_3f_1 \text{ et } D_2f_3 = D_3f_2$$

c'est-à-dire $\mathbf{rot} \vec{f} = \vec{0}$.

Ainsi, en bref, dans un ouvert étoilé $\mathbf{rot} \vec{f} = \vec{0} \Leftrightarrow \exists \alpha : \vec{f} = \mathbf{grad} \alpha = \vec{\nabla} \alpha$

Remarque : Cette propriété se généralise à d'autres types d'ouverts : **les ouverts simplement connexes**.

Par définition, un ouvert est dit simplement connexe lorsque tout chemin fermé peut se déformer continûment sur un point, la déformation se faisant dans l'ouvert (c.f. plus loin : on dit que le chemin est homotope à un chemin constant).

Démonstration

\Rightarrow est évident car si vous avez un champ f de classe C_1 tel que les composantes de f soient les dérivées partielles d'un même champ scalaire, alors :

$$D_{x_j}f_k = D_j D_k \alpha = D_{x_k}f_j$$

car α est de classe C_2 .

⇐ supposons que l'ouvert soit étoilé par rapport à l'origine. On pose² :

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \vec{x} \bullet \vec{f}(tx_1, \dots, tx_n) dt$$

où $\vec{x} = [x_1, \dots, x_n]$

L'intégrale est définie car on sait que les points (tx_1, \dots, tx_n) , $t \in [0, 1]$ appartiennent à l'ouvert (Ω est étoilé).

On a ici une application d'un cas des intégrales paramétriques pour le calcul des D_{x_j} .

$$\int_0^1 \vec{x} \bullet \vec{f}(tx_1, \dots, tx_n) dt = \int_0^1 \sum_{r=1}^n x_r \underbrace{f_r(tx_1, \dots, tx_n)}_{\in \Omega} dt$$

Les intégrales paramétriques s'appliquent très facilement ici car \vec{f} est C_1 et que l'on se trouve sur un compact !

$$\begin{aligned} D_{x_j} \alpha &\stackrel{1}{=} \int_0^1 D_{x_j} \left(\sum_{r=1}^n x_r f_r(tx_1, \dots, tx_n) \right) dt \\ &\stackrel{2}{=} \int_0^1 \sum_{r=1}^n D_{x_j} (x_r f_r(tx_1, \dots, tx_n)) dt \\ &\stackrel{3}{=} \int_0^1 \left[\sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n x_r t (D_j f_r)(tx_1, \dots, tx_n) + f_j(tx_1, \dots, tx_n) + tx_j (D_j f_j)(tx_1, \dots, tx_n) \right] dt \\ &\stackrel{4}{=} \int_0^1 \left[\underbrace{\sum_{r=1}^n x_r t \overbrace{(D_j f_r)}^{D_r f_j}}_{t \cdot D_t (f_j(tx_1, \dots, tx_n))} + f_j(tx_1, \dots, tx_n) \right] dt \\ &\stackrel{5}{=} \int_0^1 D_t (t f_j(tx_1, \dots, tx_n)) dt \\ &\stackrel{6}{=} f_j(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

1. Passage de la dérivée sous le signe d'intégration par le théorème des intégrales paramétriques.
2. La dérivée d'une somme (finie) est égale à la somme des dérivées.
3. Dérivation d'un produit
4. Recombinaison de la somme.
5. Egalité des dérivées croisées (hypothèse).
6. Calcul de l'intégrale par variation de primitive.

2. Ceci peut être interprété de la manière suivante : α est un potentiel = l'intégration du champ \vec{f} le long du segment joignant l'origine à x .

On peut généraliser ce résultat à d'autres types d'ouverts.

Voir la transition entre les chapitres 2 et 3

Remarque : Comme tout point d'un ouvert Ω est le centre d'un ouvert étoilé (par exemple une boule) qui est inclus dans Ω , on peut déduire du résultat précédent la propriété suivante : si f est de classe C_1 dans un ouvert, alors f dérive **localement** d'un potentiel si et seulement si ses composantes vérifient les égalités des dérivées croisées. Plus précisément :

Soient $f_1, \dots, f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C_1 , alors les f_j vérifient les égalités croisées $\Leftrightarrow \forall x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage de ω_0 de x_0 et $\alpha_0 \in C_2(\omega_0)$ tel que $D_j \alpha_0 = f_j \forall j$.

2.4.2 Théorèmes de primitivation : Réciproque 2

Si $\vec{f} : \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R}^3$, alors $\text{div}(\mathbf{rot} \vec{f}) = \nabla \bullet (\nabla \wedge \vec{f}) = 0$ dans Ω .

La réciproque s'écrit : si $\text{div} \vec{b} = 0$, alors $\exists \vec{f}$ tel que $\vec{b} = \mathbf{rot} \vec{f}$. Mais cette relation n'est pas toujours vraie.

La réciproque est vraie si Ω est un ouvert étoilé.

Soit Ω un ouvert étoilé par rapport à x_0 et soit $\vec{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C_1 , alors

$$\exists \vec{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \vec{b} = \mathbf{rot} \vec{f} \Leftrightarrow \text{div} \vec{b} = 0$$

Preuve

\Rightarrow ok

\Leftarrow Supposons l'ouvert étoilé en l'origine ($x_0 = 0$), on pose

$$\vec{f}(x, y, z) = \int_0^1 \vec{b}(tx, ty, tz) \wedge \vec{x} \cdot t dt$$

où $\vec{x} = [x, y, z]$

Ensuite, on vérifie que \vec{f} est C_2 par les intégrales paramétriques et donc $\vec{b} = \mathbf{rot} \vec{f}$ dans Ω .

2.4.3 Théorème de primitivation 3 : dans le cas de la divergence

On montre que

$$\forall \Omega \subset \mathbb{R}^3, \forall \alpha : \Omega \xrightarrow{C_1} \mathbb{R}$$

$$\exists \vec{a} : \Omega \xrightarrow{C_2} \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \text{div} \vec{a} = \alpha$$

Références du chapitre - Partie II

Théorie

- Dans le EK chapitre 10, paragraphes 10.1, 10.2, 10.4, 10.5, 10.6, 10.7, 10.8, 10.9.
- le cours

Exercices

- Liste(s) d'exercices disponible(s) sur le site du service : <http://www.afo.ulg.ac.be/>

2.5 Courbes, surfaces et intégrales associées

2.5.1 Définitions et rappels

Nous nous plaçons dans \mathbb{R}^3 , la notion de courbe ou de surface plane apparaîtra comme un cas particulier.

Définition d'une courbe

Un courbe de l'espace est un ensemble de points dont les coordonnées cartésiennes peuvent être définies par trois fonctions scalaires d'une variable réelle.

$$\mathcal{C} = \{P(x, y, z) : x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in I \subset \mathbb{R}\}$$

le paramétrage est : $\overrightarrow{OP} = \vec{\gamma}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$

Définition équivalente : On peut aussi définir une courbe de manière équivalente grâce à une fonction vectorielle :

Une courbe de l'espace est un ensemble de points décrit à l'aide d'une fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles. Cette fonction est appelée paramétrage ou chemin et est la plupart du temps définie sur un intervalle (ou une union d'intervalles).

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \quad t \mapsto \vec{\gamma}(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)] && \text{(chemin)} \\ \mathcal{C} = \{P(x, y, z) : x = \gamma_1(t), y = \gamma_2(t), z = \gamma_3(t), t \in I\} && \text{(courbe)} \end{aligned}$$

Remarques

- Une courbe est un ensemble de points. Il y a bien sûr plusieurs paramétrages pour une même courbe.
- Bien souvent, il est sous-entendu qu'un chemin est une fonction continue; la notion de régularité est celle de la dérivabilité (y compris sur un intervalle fermé). On utilisera souvent des chemins de classe C_1 par morceaux³.

Définition d'une surface

Une surface est un ensemble de points décrit à l'aide d'un paramétrage (souvent supposé régulier) qui dépend de 2 variables réelles.

3. cela signifie que $\vec{\gamma}$ est continu sur I , que I peut s'écrire sous la forme d'une union finie d'intervalles telle que la restriction de $\vec{\gamma}$ à chacun des intervalles de cette union soit de classe C_1 .

$$S = \{P(x, y, z) : \overrightarrow{OP} = \vec{\phi}(u, v); (u, v) \in K \subset \mathbb{R}^2\}$$

Remarques

- Une surface est un ensemble de points. Il y a bien sûr plusieurs paramétrages pour une même surface.
- Un paramétrage d'une surface est souvent appelé couverture.

Paramétrages, régularité et orientation

Courbes

Il est évident qu'une même courbe peut être représentée par plusieurs paramétrages. Afin de définir les notions d'orientation, de vecteur tangent unitaire, d'intégrales sur des courbes en utilisant des paramétrages, il est donc indispensable de ne travailler qu'avec une famille de paramétrages autorisant des définitions intrinsèques.

Pour de nombreuses applications, il suffira de travailler avec des chemins rectifiables (et injectifs).

Le chemin $\vec{\gamma}$ défini sur $[a, b]$ est dit rectifiable si l'ensemble

$$\left\{ \sum_{j=1}^J \|\vec{\gamma}(a_j) - \vec{\gamma}(a_{j-1})\| : a_0, \dots, a_J \text{ découpage de } [a, b] \right\}$$

est borné.

Dans ce cas, sa borne supérieure est appelée *longueur* de $\vec{\gamma}$ et est notée $L_{\vec{\gamma}}$.

Signalons l'exemple fondamental suivant : si $\vec{\gamma}$ est de classe C_1 par morceaux, alors il est rectifiable et injectif (sauf aux extrémités dans le cas de chemins fermés⁴).

Rappelons qu'un chemin injectif est qualifié de « chemin simple » et qu'une « courbe simple » est une courbe qui admet un paramétrage par un chemin simple.

courbe plane : dans le cas où $\vec{\gamma}(t) = [t, f(t), 0]$ (courbe plane décrite par une fonction), on obtient

$$\int_a^b \sqrt{1 + (Df)^2} dt$$

Exemple : la chaînette

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \text{un intervalle compact}$$

Représenter f et calculer la longueur de la courbe qui représente f pour $x \in [-1; 1]$.

Surfaces

Dans le contexte du cours, nous n'utiliserons les surfaces que dans un cadre très pratique. Nous nous contenterons des définitions et propriétés pratiques suivantes, lesquelles sont rigoureuses d'un point de vue mathématique mais ne rencontrent certes pas une étude plus vaste de la théorie des surfaces.

4. que l'on appelle aussi lacets

Nous nous plaçons d'emblée dans un contexte qui va autoriser la définition d'intégrales intrinsèques.

Par définition, une *couverture* est la donnée d'un compact ⁵ K de \mathbb{R}^2 , d'une fonction vectorielle $\vec{\phi}$ de classe C_1 dans un ouvert contenant K , à valeurs dans \mathbb{R}^3 , vérifiant les propriétés suivantes

- l'application $\vec{\phi}$ est injective sur l'intérieur de K ,
- et il existe une fonction vectorielle $\vec{\psi}$ de classe C_1 dans un ouvert de \mathbb{R}^3 contenant l'image par $\vec{\phi}$ de l'intérieur de K telle que ⁶ $\vec{\psi}(\phi_1(t, s), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v)) = [u, v]$ pour tout (u, v) appartenant à l'intérieur de K .

On appelle *surface* (ou portion régulière de surface), une partie S de \mathbb{R}^3 pour laquelle il existe une couverture dont l'image est S .

En pratique

Pour la suite des définitions nous considérerons que :

- le chemin $\vec{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ (\mathbb{R}^2) est suffisamment régulier au sens de la dérivabilité et de la non annulation de la dérivée (en aucun point), rectifiable. Ce chemin sert à paramétrer une courbe.
- la couverture $\vec{\phi} : K \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est suffisamment régulière ⁷ et sert à paramétrer une surface.

Orientation

Soit $\vec{\gamma}(t)$, $t \in [a, b]$ une représentation paramétrique simple de la courbe simple \mathcal{C} . Alors, pour toute représentation paramétrique simple $\vec{r}(t)$, $t \in [c, d]$ de \mathcal{C} , il existe une fonction f , continue et strictement monotone sur $[c, d]$, d'image égale à $[a, b]$ et telle que ⁸ $\vec{r}(t) = \vec{\gamma}(f(t))$ pour tout $t \in [c, d]$.

Entre les paramétrages simples d'une même courbe, on peut ainsi définir une relation d'équivalence : deux paramétrages sont dits équivalents si la fonction qui permet de passer de l'un à l'autre est strictement croissante. Cette relation définit deux classes et choisir l'une des deux classes s'appelle orienter la courbe.

On écrit alors \mathcal{C}^+ pour signifier que l'on a orienté la courbe.

Sans entrer dans les détails, disons que l'on établit pour les surfaces un résultat analogue à celui des paramétrages de courbes par des chemins simples : quand on dispose de deux couvertures d'une même surface ⁹, on montre qu'il y a toujours un changement de variables entre les deux. On répartit alors les couvertures en deux classes, selon le signe du déterminant jacobien du changement de variables qui permet de passer de l'une à l'autre. Orienter la surface consiste alors à choisir l'une des deux classes.

On écrit alors S^+ pour signifier que l'on a orienté la surface.

5. on supposera que l'intérieur de K est non vide

6. Cela signifie que l'on doit pouvoir inverser $\vec{\phi}$ de façon régulière

7. Régulière au sens indiqué au dessus, ajouté de la condition de non-annulation de la fonction $(u, v) \mapsto \vec{N}(u, v) := D_u \vec{\phi} \wedge D_v \vec{\phi}$ en tout point de l'intérieur de K .

8. cette relation caractérise en fait f

9. c'est ici qu'il faudrait prendre soin de préciser s'il s'agit de notion locale ou globale que l'on considère

Vecteur tangent

En un point d'une courbe

Un vecteur tangent en un point P tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{\gamma}(t)$ d'une courbe régulière est donné par la dérivée du (d'un) paramétrage.

$$\vec{v}(t) = D\vec{\gamma}(t)$$

Remarques :

- Le vecteur tangent non-unitaire est noté \vec{v} pour rappeler la vitesse en physique.
- Si l'on change de paramétrage, les vecteurs tangents obtenus ainsi ne sont pas les mêmes en général, mais ils sont multiples l'un de l'autre.

Si l'on considère à présent une courbe orientée (et régulière), tous les vecteurs obtenus par le processus précédent, divisés par leur norme, sont égaux (et changer d'orientation donne simplement le vecteur opposé).

On définit ainsi le vecteur tangent unitaire au point P de la courbe orientée \mathcal{C}^+ :

$$\vec{t}(P) = \frac{D\vec{\gamma}(t)}{\|D\vec{\gamma}(t)\|}$$

quel que soit le paramétrage $\vec{\gamma}$ de la courbe pour autant qu'il appartienne à l'orientation choisie.

En un point d'une surface

L'ensemble des vecteurs tangents à la surface \mathcal{S} est le plan vectoriel engendré par $D_u\vec{\phi}$ et $D_v\vec{\phi}$.

Vecteur normal

En un point d'une surface

Pour tout (u, v) , le vecteur normal : $\vec{N}(u, v) = D_u\vec{\phi} \wedge D_v\vec{\phi}$ est orthogonal au plan tangent à la surface au point paramétré par (u, v) .

On peut donc aussi définir une normale unitaire continue

$$\vec{n}(u, v) = \frac{\vec{N}(u, v)}{\|\vec{N}(u, v)\|}$$

en tout point de l'image par $\vec{\phi}$ de l'intérieur de K .

Remarque : On dit que l'on peut orienter cette partie de la surface (ie celle qui correspond à l'image par ϕ de l'intérieur de K). Quand on définit un vecteur normal unitaire à l'aide d'une couverture, un changement de couverture de la même orientation ne change pas le vecteur normal unitaire ; par contre, une couverture de l'autre orientation donne l'opposé du vecteur en guise de vecteur normal unitaire.

2.5.2 Longueur d'une courbe et aire d'une surface

Longueur de courbe et chemin rectifiable

Soit un chemin $\vec{\gamma}$ **continûment dérivable** dans un ensemble ouvert¹⁰ $I \subset \mathbb{R}$. Dans ce cas, le chemin est dit rectifiable lorsque que la fonction $t \mapsto \|D\vec{\gamma}(t)\|$ est intégrable sur I .

La longueur d'un chemin rectifiable est (en écrivant $I =]a, b[$)

$$\int_a^b \|D\vec{\gamma}(t)\| dt$$

Aire d'une surface

L'aire de la surface \mathcal{S} est :

$$\iint_K \|D_u \vec{\phi} \wedge D_v \vec{\phi}\| du dv$$

2.5.3 Intégrale sur un chemin (une courbe)

Soient :

$$\vec{f} = [f_1, f_2, f_3] : \Omega \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^3 \quad (\text{ou } \mathbb{C}^3) \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ ouvert.}$$

$$g : \Omega \xrightarrow{C^0} \mathbb{R},$$

$$\vec{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] : [a, b] \subset \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \Omega,$$

$$\vec{\phi} : K \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3.$$

L'intégrale sur un chemin est une généralisation du cas précédent dans lequel $g = 1$ ¹¹.

$$\int_{\vec{\gamma}} g ds = \int_a^b g(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \|D_t \vec{\gamma}(t)\| dt$$

est l'intégrale de g sur le chemin $\vec{\gamma}$: un paramétrage régulier d'une courbe \mathcal{C}

Si elle est indépendante du paramétrage $\vec{\gamma}$ de la courbe \mathcal{C} on la note $\int_{\mathcal{C}} g ds$.

Pour rappel : (cours de géométrie)

Ceci correspond à l'intégrale d'une fonction continue g sur une courbe (rectifiable) \mathcal{C} vue en géométrie et dans laquelle le paramètre est l'abscisse curviligne.

$$\int_{\mathcal{C}} g ds = \int_{s_0}^{s_1} g ds$$

10. Il n'est pas nécessaire de considérer I comme un intervalle ouvert mais il faut alors faire attention aux notions de dérivation sur un fermé.

11. Voir EK pour une interprétation du cas particulier $g = 1$

où s désigne l'abscisse curviligne. Si on utilise un autre paramétrage (régulier et injectif), un changement de variable donne

$$\int_{\mathcal{C}} g ds = \int_a^b g(\vec{\gamma}(t)) \|D\vec{\gamma}(t)\| dt$$

(En fait, l'intégrale faisant intervenir l'abscisse curviligne est un cas particulier de celui-ci puisque dans ce cas, la dérivée de $\vec{\gamma}(s)$ est de longueur 1.)

Pour rappel encore : $s(t) = \int_{t_0}^t \|D\vec{\gamma}(x)\| dx$. Cette intégrale ne dépend pas du paramétrage (injectif et régulier).

2.5.4 Intégrale curviligne, le long d'un chemin

L'intégrale le long du chemin $\vec{\gamma}$ de \vec{f} est par définition :

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz &= \int_a^b \vec{f}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \bullet D_t \vec{\gamma}(t) dt \\ &= \int_a^b \left(f_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) D_t \gamma_1(t) + f_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) D_t \gamma_2(t) \right. \\ &\quad \left. + f_3(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) D_t \gamma_3(t) \right) dt \end{aligned}$$

Remarques :

- Si la courbe est fermée, elle se note par $\oint_{\vec{\gamma}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$
- Faire attention à ne pas confondre avec l'intégrale sur une courbe ou sur un chemin.
- En général, cette intégrale dépend du chemin, i.e. du paramétrage. L'utilisation de $\int_{\mathcal{C}}$ est un abus de notation. Il existe des conditions suffisantes permettant d'affirmer l'indépendance vis-à-vis du paramétrage.
- Dans ce cas, on doit également faire attention à l'orientation. Cependant, avec des hypothèses naturelles, on peut définir la notion d'intégrale curviligne d'une fonction sur une courbe orientée.

Lien entre l'intégrale sur une courbe et l'intégrale curviligne

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}} g dx &= \int_a^b g(\vec{\gamma}(t)) \cdot D_t \gamma_1(t) dt \\ &= \int_a^b g(\vec{\gamma}(t)) \frac{D_t \gamma_1(t)}{\|D_t \vec{\gamma}(t)\|} \|D_t \vec{\gamma}(t)\| dt \\ &= \int_{\vec{\gamma}} g t_1 ds \end{aligned}$$

où t_1 est la première composante du vecteur unitaire tangent (unique à l'orientation près). On fait de même pour les intégrales en dy et dz .

2.5.5 Intégrale sur une surface

L'intégrale sur une surface est une généralisation de la formule de l'aire ($g = 1$).

$$\iint_{\vec{\phi}} g d\sigma = \iint_K g(\vec{\phi}(u, v)) \|\vec{N}(u, v)\| dudv$$

où

$$\vec{N}(u, v) = D_u \vec{\phi} \wedge D_v \vec{\phi}$$

est le vecteur normal à la surface \mathcal{S} paramétrée par $\vec{\phi}(u, v)$, $(u, v) \in K$ (un paramétrage injectif et régulier).

2.5.6 Intégrale surfacique, le long d'une surface

Les intégrales surfaciques sont des intégrales du type

$$\begin{aligned} \iint_{\vec{\phi}} f_3 dx \wedge dy &= \iint_K f_3(\vec{\phi}(u, v)) N_3(u, v) dudv \\ \iint_{\vec{\phi}} f_2 dx \wedge dz &= \iint_K f_2(\vec{\phi}(u, v)) N_2(u, v) dudv \\ \iint_{\vec{\phi}} f_1 dy \wedge dz &= \iint_K f_1(\vec{\phi}(u, v)) N_1(u, v) dudv \end{aligned}$$

où N_1, N_2, N_3 sont les composantes du vecteur normal $\vec{N} : \vec{N}(u, v) = D_u \vec{\phi}(u, v) \wedge D_v \vec{\phi}(u, v)$.

Remarques : La définition fait intervenir une couverture (i.e. un paramétrage $\vec{\phi}$). Ce n'est que sous certaines conditions (injectivités, orientation, régularité) que l'on peut rigoureusement utiliser la notation $\iint_{\mathcal{S}}$.

Le lien entre intégrale surfacique et intégrale sur une surface

$$\iint_K g(\vec{\phi}(u, v)) N_3(u, v) dudv = \iint_{\mathcal{S}} g n_3 d\sigma = \iint_{\mathcal{S}} g dx \wedge dy$$

où n_3 est la troisième composante du vecteur normal unitaire (et analogue pour les autres cas).

2.5.7 Notion d'orientation et d'invariance des intégrales

Bien que l'on définisse toutes les intégrales curvilignes, sur des courbes et sur des surfaces grâce à un paramétrage (ce qui est un abus de langage), la valeur de l'intégrale est bien indépendante du paramétrage choisi pour autant que certaines précautions d'injectivité, d'orientation et de régularité soient prises.

Invariance de l'intégrale sur des chemins simples rectifiables qui ont la même image

Si l'on dispose de deux paramétrages d'une même courbe simple par des chemins simples rectifiables $\vec{\gamma}_1$ et $\vec{\gamma}_2$ et si g est une fonction continue sur la courbe, alors

$$\int_{\vec{\gamma}_1} g ds = \int_{\vec{\gamma}_2} g ds.$$

On peut alors définir l'intégrale de g sur la courbe simple rectifiable \mathcal{C} comme étant l'intégrale de g sur n'importe quel chemin simple rectifiable $\vec{\gamma}$ paramétrant la courbe :

$$\int_{\mathcal{C}} g \, ds = \int_{\vec{\gamma}} g \, ds.$$

Intégrale curviligne le long de chemins rectifiables qui ont la même image

Si l'on dispose de deux paramétrages d'une même courbe simple par des chemins simples rectifiables $\vec{\gamma}_1$ et $\vec{\gamma}_2$ et si \vec{f} est une fonction continue sur la courbe, alors

$$\int_{\vec{\gamma}_1} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \pm \int_{\vec{\gamma}_2} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

le signe $+$ correspondant au cas où les paramétrages font partie de la même orientation et le signe $-$ au cas où leurs orientations sont différentes.

On peut alors définir l'intégrale curviligne de f le long de la courbe simple rectifiable orientée \mathcal{C}^+ comme étant l'intégrale de f sur n'importe quel chemin simple rectifiable $\vec{\gamma}$ paramétrant la courbe et qui appartient à l'orientation choisie :

$$\int_{\mathcal{C}^+} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_{\vec{\gamma}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz.$$

Invariance de l'intégrale sur des couvertures qui ont la même image.

Si l'on dispose de deux couvertures $(\vec{\phi}^1, K_1)$ et $(\vec{\phi}^2, K_2)$ d'une même surface \mathcal{S} et si g est une fonction continue sur \mathcal{S} , alors

$$\int_{K_1} g(\vec{\phi}^1(u, v)) \left\| D_u \vec{\phi}^1 \wedge D_v \vec{\phi}^1 \right\| \, du \, dv = \int_{K_2} g(\vec{\phi}^2(u, v)) \left\| D_u \vec{\phi}^2 \wedge D_v \vec{\phi}^2 \right\| \, du \, dv.$$

On peut alors définir l'intégrale d'une fonction $g \in C_0(\mathcal{S})$ sur la surface \mathcal{S} , notée $\iint_{\mathcal{S}} g \, d\sigma$ par

$$\iint_{\mathcal{S}} g \, d\sigma = \iint_K g(\vec{\phi}(u, v)) \left\| D_u \vec{\phi} \wedge D_v \vec{\phi} \right\| \, du \, dv$$

quelle que soit la couverture $(\vec{\phi}, K)$ choisie pour paramétrer \mathcal{S} .

2.6 Formules

2.6.1 Formule de Green dans le plan

Soient K un compact du plan xy dont le contour \mathcal{C} est composé de l'union finie de courbes planes orientées et $\vec{f} = [f_1, f_2] : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{C}^2 tel que $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ et f_1, f_2 sont continûment dérivables dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. On a

$$\iint_K (D_x f_2 - D_y f_1) dx dy = \oint_{\mathcal{C}^+} (f_1 dx + f_2 dy)$$

Démonstration dans un cas particulier

Ce cas est le cas particulier où le compact est « parallèle à l'axe des y ».

$$u, v : [a, b] \xrightarrow{\mathcal{C}_0} \mathbb{R}$$

$$u, v :]a, b[\xrightarrow{\mathcal{C}_1} \mathbb{R}$$

$$Du, Dv \in \mathbb{L}_1(]a, b[)$$

$$u(x) < v(x), \forall x \in]a, b[$$

$$K = \{ (x, y) : x \in [a, b] \quad \& \quad u(x) \leq y \leq v(x) \}$$

La courbe \mathcal{C}^+ est la courbe orientée « aire à gauche » constituée de la juxtaposition des courbes orientées $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$.

Montrons que

$$\iint_K D_x f_2 dx dy = \int_{\mathcal{C}^+} f_2 dy \quad (1)$$

et que

$$\iint_K D_y f_1 dx dy = - \int_{\mathcal{C}^+} f_1 dx \quad (2)$$

lorsque $\vec{f} = [f_1, f_2] : \Omega \xrightarrow{\mathcal{C}_1} \mathbb{R}^2$, $K \subset \Omega$

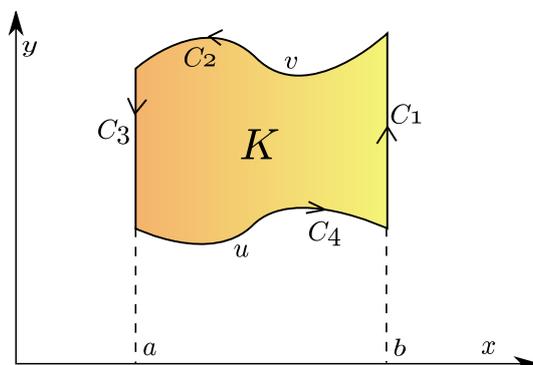


FIGURE 2.3 – Représentation du compact K

Membre de gauche de (1) :

$$\iint_K \underbrace{D_x f_2}_{\in \mathbb{L}_1(K)} dx dy = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} D_x f_2(x, y) dy dx$$

Intégrale paramétrique dont les bornes dépendent du paramètre.

$$D_x \underbrace{\int_{u(x)}^{v(x)} f_2(x, y) dy}_{F(u(x), v(x), x)}$$

qui ressemble à

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \int_\alpha^\beta f_2(\gamma, y) dy$$

On pose $G(x) = F(u(x), v(x), x)$ et on dérive en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées (dont vous n'oubliez pas de vérifier les hypothèses).

Rappel sur les primitives, pour f continu sur un intervalle ouvert contenant t_0 :

$$g(t) = \int_{t_0}^t f(s) ds \Rightarrow D_t g(t) = f(t)$$

Ici, on a alors,

$$\begin{aligned} D_x G(x) &= D_x F(u(x), v(x), x) = (D_\alpha F)_{(u(x), v(x), x)} u'(x) + (D_\beta F)_{(u(x), v(x), x)} v'(x) + (D_\gamma F)_{(u(x), v(x), x)} \\ &= -f_2(x, u(x)) u'(x) + f_2(x, v(x)) v'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} D_x f_2(x, y) dy \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \iint_K D_x f_2 dx dy &= \int_a^b \left(D_x G(x) + f_2(x, u(x)) u'(x) - f_2(x, v(x)) v'(x) \right) dx \\ &= \int_{u(b)}^{v(b)} f_2(b, y) dy - \int_{u(a)}^{v(a)} f_2(a, y) dy + \int_a^b [f_2(x, u(x)) u'(x) - f_2(x, v(x)) v'(x)] dx \end{aligned}$$

Membre de droite de (1) :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &: [b, t], \quad t \in [u(b), v(b)] \\ -\mathcal{C}_2 &: [t, v(t)], \quad t \in [a, b] \\ -\mathcal{C}_3 &: [a, t], \quad t \in [u(a), v(a)] \\ \mathcal{C}_4 &: [t, u(t)], \quad t \in [a, b] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}^+} &= \int_{\mathcal{C}_1} + \int_{\mathcal{C}_2} + \int_{\mathcal{C}_3} + \int_{\mathcal{C}_4} \\ &= \int_{u(b)}^{v(b)} f_2(b, t) \cdot 1 dt - \int_a^b f_2(t, v(t)) v' dt - \int_{u(a)}^{v(a)} f_2(a, t) dt + \int_a^b f_2(t, u(t)) u' dt \end{aligned}$$

et l'égalité 1 d'être prouvée.

Membre de gauche (2) :

$$\iint_K D_y f_1 dx dy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} D_y f_1(x, y) dy \right) dx = \int_a^b (f_1(x, v(x)) - f_1(x, u(x))) dx$$

par variation de primitive.

Membre de droite de l'égalité (2) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}^+} &= \int_{\mathcal{C}_1} + \int_{\mathcal{C}_2} + \int_{\mathcal{C}_3} + \int_{\mathcal{C}_4} \\ &= \int_{u(b)}^{v(b)} f_1(b, t) \cdot 0 dt - \int_a^b f_1(t, v(t)) \cdot 1 dt - \int_{u(a)}^{v(a)} f_1(a, t) \cdot 0 dt + \int_a^b f_1(t, u(t)) \cdot 1 dt \\ &= - \int_a^b f_1(t, v(t)) dt + \int_a^b f_1(t, u(t)) dt \end{aligned}$$

Et la formule complète d'être prouvée.

Application de la formule de Green

La formule de Green s'écrit

$$\iint_K (D_x f_2 - D_y f_1) dx dy = \oint_{\mathcal{C}^+} (f_1 dx + f_2 dy)$$

dans le cas de $f_2 = x$ et $f_1 = 0$, on a

$$\iint_K dx dy = \oint_{\mathcal{C}^+} x \cdot dy$$

et pour $f_1 = -y$ et $f_2 = 0$, on a

$$\iint_K dx dy = \oint_{\mathcal{C}^+} -y \cdot dx$$

Ceci permet d'appliquer la formule de Green au cas du calcul d'aire de surfaces planes.

Par exemple : aire d'une ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Paramétrage de \mathcal{C} , bord de K :

$$\begin{cases} x = x(t) = a \cos t \\ y = y(t) = b \sin t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi]$$

$$\iint_K dx dy = \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot b \sin t dt = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 2t + 1) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

2.6.2 Formule de Gauss ou Théorème de la divergence

Soient V un compact de l'espace (\mathbb{R}^3) dont la frontière \mathcal{S} est composée de l'union finie de surfaces orientables et $\vec{f} = [f_1, f_2, f_3] : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, une fonction vectorielle de classe C_1 telle que $V \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$. Alors

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{f} dx dy dz = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \bullet \vec{n} d\sigma$$

où \vec{n} est la normale unitaire extérieure à la surface \mathcal{S} .

Application

Soit U un champ scalaire inconnu qui représente la température en chaque point d'un corps. La quantité de chaleur qui entre dans le volume par unité de temps :

$$\iint_S \underbrace{\vec{\nabla}U}_{f(x,y,z)} \cdot \vec{n} d\sigma$$

Vu que c'est une modélisation d'un système réel, on trouve que U doit vérifier :

$$\iiint_V D_t U dx dy dz = \iint_S \vec{\nabla}U \cdot \vec{n} d\sigma$$

Grâce au théorème de Gauss, on peut égaler :

$$\iiint_V D_t U dx dy dz = \iiint_V \operatorname{div} \vec{\nabla}U dx dy dz$$

d'où, la relation appelée "équation de la chaleur"

$$D_t U = \operatorname{div} \vec{\nabla}U = \Delta U$$

où

$$\Delta U = D_x^2 U + D_y^2 U + D_z^2 U$$

est le **Laplacien** de la fonction scalaire U .

Exemples D'autres exemples d'application peuvent être trouvés à la page 459 du EK. La section 10.8 page 463 donne aussi deux exemples ainsi que l'interprétation physique de la divergence.

2.6.3 Formule de Stokes

Soient S une union finie de surfaces régulières orientables* dont la frontière est la courbe fermée orientée* \mathcal{C} composée d'une union finie d'arcs de courbes réguliers et $\vec{f} = [f_1, f_2, f_3]$ de classe $C_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$, alors

$$\iint_S \mathbf{rot} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot \vec{t} ds = \oint_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

où \vec{n} est la normale unitaire à S et \vec{t} est le vecteur tangent unitaire à \mathcal{C} .

* La courbe \mathcal{C} est orientée de manière à respecter la règle du tire-bouchon lors de son parcours par rapport à l'orientation de \vec{n} .

Exercice : Vérifier que cette formule généralise la formule de Green dans le plan.

Exemple

Retour à un exemple de champ dont la divergence est nulle mais qui ne dérive pas d'un potentiel vectoriel.

$$\vec{a} = \frac{\vec{r}}{||\vec{r}||^3} \text{ avec } \vec{r} = [x, y, z] \text{ et } \Omega = \mathbb{R}_0^3$$

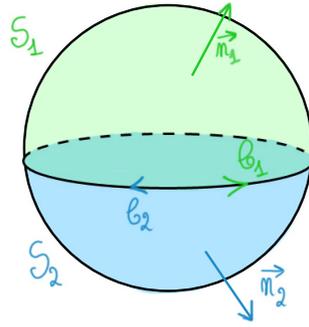


FIGURE 2.4 – « Sphère »

Par l'absurde : si il existe $\vec{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C_2 tel que $\mathbf{rot} \vec{f} = \vec{a}$, alors

$$\iint_S \mathbf{rot} \vec{f} \bullet \vec{n} \, d\sigma = \iint_S \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \bullet \vec{n} \, d\sigma = \iint_S d\sigma = 4\pi$$

Par Stokes sur chacune des deux parties de la sphère :

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{rot} \vec{f} \bullet \vec{n} \, d\sigma &= \iint_{S_1} \mathbf{rot} \vec{f} \bullet \vec{n}_1 \, d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{rot} \vec{f} \bullet \vec{n}_2 \, d\sigma \\ &= \oint_{\mathcal{C}_1} \vec{f} \bullet \vec{t} \, ds + \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{f} \bullet \vec{t} \, ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

Parce que $\mathcal{C}_1 = -\mathcal{C}_2$ (orientation opposée).

L'existence de deux valeurs différentes pour l'intégrale donne lieu à une absurdité. On en déduit que \vec{f} n'existe pas. Ce qui ne doit pas surprendre : Ω n'était pas étoilé.