1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématique (partim B) : corrigé du test 1 (Géologie)

Version 12 février 2016

Test 1 du 01-03-2016

1. **On donne** $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \end{pmatrix}$ **,** $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ **et** $C = \begin{pmatrix} (1+i)^2 & \frac{i}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   Calculer (si possible) $\overline{A}B$ **et** C^*A**.**

   Solution. $\overline{A}.B$ est impossible à calculer car le nombre de colonnes (1) de $\overline{A}$ n'est pas égal au nombre de lignes (3) de B. Par contre, le produit C^*A peut être calculé puisque le nombre de colonnes (3) de C^* est égal au nombre de lignes (3) de A. On a

$$C^*A = \begin{pmatrix} -2i & 0 & 1 \\ \frac{-i}{2} & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2i \\ -2-i/2 \\ i \end{pmatrix}.$$

2. **La matrice** M **suivante est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

   Solution. Si I est la matrice identité de dimension 2 alors les valeurs propres de M sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(M - \lambda I) = 0$. On a

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4.$$

   Comme $\det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2i$ ou $\lambda = -2i$, les valeurs propres de M sont $2i$ et $-2i$. Comme elles sont simples, la matrice M est diagonalisable.

   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $2i$ sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(M - 2i\,I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -2ix - y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2ix \end{pmatrix}.$$

   Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $2i$ sont les vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{C}_0.$$

   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $-2i$ sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(M + 2i\,I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 4 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2ix - y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2ix \end{pmatrix}.$$

Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $-2i$ sont les vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0.$$

Une matrice inversible S possible est donnée par

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2i & 2i \end{pmatrix} \quad \text{qui est telle que} \quad S^{-1}MS = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}.$$