Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématique (partim B) : corrigé du test 1
Toutes les sections sauf Géologie

Version 12 février 2016

Test 1 du 17-02-2016

1. **La matrice** $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **est-elle inversible ? Pourquoi ? Si c'est possible, calculer son inverse.**

   Solution. En remplaçant la troisième ligne par cette ligne moins 2 fois la deuxième, on obtient
$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-10+2) = 8 \neq 0,$$
   si on applique la première loi des mineurs à la troisième colonne. Puisque le déterminant de M n'est pas nul, la matrice inverse de M existe.

   Si $\mathcal{M}$ est la matrice des cofacteurs des éléments de M, on a
$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et dès lors} \qquad M^{-1} = \frac{1}{\det M}\,\widetilde{\mathcal{M}} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. **On donne** $A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Lors d'un examen, on demande de rechercher, si possible, une forme diagonale de cette matrice et d'écrire la matrice inversible qui y conduit. Un étudiant propose les réponses suivantes :

   "La matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$ **est telle que la forme de la matrice diagonale correspondante est** $\Delta = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$**."**

   Vérifier ses résulats et préciser quelles sont, selon lui, les valeurs propres de cette matrice ainsi que leur multiplicité.
   Préciser également les vecteurs propres associés aux différentes valeurs propres.

   Solution. Pour vérifier que les matrices ci-dessus sont correctes, vérifions qu'on a bien $AS = S\Delta$. On a l'égalité puisque
$$AS = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 2 \\ 0 & 0 & 4-2i \end{pmatrix}$$
   et
$$S\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 2 \\ 0 & 0 & 4-2i \end{pmatrix}.$$

Les trois valeurs propres de la matrice M sont donc i (double) et 2 (simple).
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre i sont les vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c'\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ où } c \text{ et } c' \text{ sont des constantes complexes non simultanément nulles.}$$

Ceux relatifs à la valeur propre 2 sont les vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix}0\\1\\2-i\end{pmatrix},\ c\in\mathbb{C}_0.$$

1. **La matrice** $M = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -10 \\ -5 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **est-elle inversible ? Pourquoi ? Si c'est possible, calculer** $(M^{-1})_{1,3}$.

   Solution. En remplaçant la troisième colonne par la somme de cette colonne et des deux autres colonnes, on obtient
$$\det M = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
   si on applique la première loi des mineurs à la troisième colonne (on constate facilement que la troisième colonne est combinaison linéaire des autres colonnes). Puisque le déterminant de M est nul, la matrice inverse de M n'existe pas et donc l'élément demandé non plus !

2. **La matrice M suivante est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.**
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   Solution. Si I est la matrice identité de dimension 3 alors les valeurs propres de M sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(M - \lambda I) = 0$. On a
$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = ((1-\lambda)^2 - 1)(2-\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^2$$
   si on applique la première loi des mineurs à la dernière ligne.
   Comme det $(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(2-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 2$, les valeurs propres de M sont 2 (double) et 0 (simple).

   Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 2 sont les vecteurs non nuls X tels que
$$(M-2\,I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 2 sont les vecteurs du type
$$c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0.$$
   Parmi les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double 2, il est impossible d'en trouver deux linérairement indépendants : la matrice M n'est donc pas diagonalisable.

Test 1 du 19-02-2016

1. **On donne** $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 4 & -8 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ **et** $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. **Montrer directement que** X **est un vecteur propre de la matrice** A **de valeur propre** λ_0 **et donner la valeur de** λ_0**.**

   Solution. Par définition, X, vecteur non nul, est un vecteur propre de A de valeur propre λ_0 si $AX = \lambda_0 X$. Comme

$$AX = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 4 & -8 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = (-3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

   X est bien un vecteur propre de A de valeur propre -3.

2. **On donne** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **et** $B = \begin{pmatrix} -i^2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & i^3 \end{pmatrix}$. **Calculer (si possible)** $\det(\frac{1}{2}AB)$**.**

   Solution. Les matrices carrées A et B sont de même dimension (3), le produit peut donc se calculer et le déterminant également. Vu les propriétés des déterminants, on a

$$\det\left(\frac{1}{2}AB\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \det A.\det B = \frac{1}{8}.(-8).2(4+i) = -2(4+i).$$

   En effet, en remplaçant la deuxième ligne par la somme de cette ligne avec la première, on a

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4-4 = -8,$$

   si on applique la première loi des mineurs à la première colonne et aussi

$$\det B = \begin{vmatrix} -i^2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & i^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -i \end{vmatrix} = 2(4+i),$$

   si on remplace la première ligne par la somme de cette ligne avec la troisième et si on applique la première loi des mineurs à la deuxième colonne.