1, 2, 3...Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématique (partim B) : corrigé du test 2

Version 4 mars 2016

Test 2 du 03-03-2016

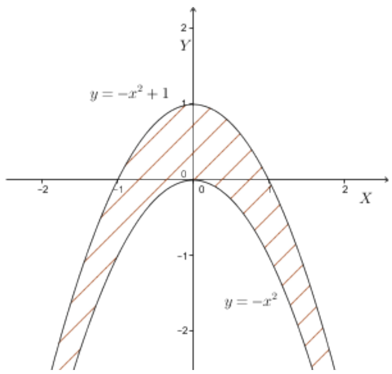
1. **On donne la fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{\arcsin(x^2 + y)}$.**
a) Déterminer le domaine de définition A et celui de dérivabilité B et les représenter.
b) Calculer la dérivée partielle de f par rapport à sa première variable.

Solution. a) Le domaine de définition de f est l'ensemble

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \arcsin(x^2 + y) \geq 0, -1 \leq x^2 + y \leq 1\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 \leq y \leq -x^2 + 1\right\}.$$

Le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \arcsin(x^2 + y) > 0, -1 < x^2 + y < 1\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 < y < -x^2 + 1\right\}.$$

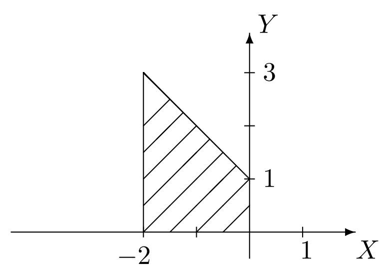


L'ensemble A est l'ensemble des points de la partie hachurée, les points des paraboles étant compris dans A. L'ensemble B est l'ensemble des points de la partie hachurée, les points des paraboles étant exclus.

b) La dérivée partielle de f par rapport à sa première variable est donnée par

$$D_x f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\arcsin(x^2 + y)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 + y)^2}} \cdot 2x$$
$$= \frac{x}{\sqrt{\arcsin(x^2 + y)}\sqrt{1 - (x^2 + y)^2}}.$$

2. **On considère une fonction f intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné A. Ecrire dans un ordre et dans l'autre l'intégrale $\iint_A f(x, y)\ dxdy$.**



Solution. L'ensemble d'intégration A est l'ensemble

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 0] \ et \ y \in [0, -x + 1]\right\}$$
$$= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1] \ et \ x \in [-2, 0]\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, 3] \ et \ x \in [-2, -y + 1]\right\}.$$

Comme f est intégrable sur A, on obtient

$$I = \int\int_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-2}^{0} \left(\int_0^{-x+1} f(x, y)\, dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_{-2}^{0} f(x, y)\, dx\right) dy + \int_1^3 \left(\int_{-2}^{-y+1} f(x, y)\, dx\right) dy.$$

Test 2 du 04-03-2016

1. a) Si f est une fonction continûment dérivable sur $A =]-1,1[\times]1,+\infty[$, sur quel ensemble la fonction g définie par $g(t) = f(\ln(t), t^2-3)$ est-elle dérivable ?
b) Déterminer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Solution. a) Le domaine de dérivabilité de cette fonction est l'ensemble B égal à

$$\{t \in \mathbb{R} : t > 0,\ -1 < \ln t < 1,\ t^2 - 3 > 1\} = \left\{t \in \mathbb{R} : t > 0,\ \frac{1}{e} < t < e,\ (t < -2 \text{ ou } t > 2)\right\} =]2, e[.$$

b) Sa dérivée est donnée par

$$(Dg)(t) = (D_x f)(\ln(t), t^2-3)\ .\ \frac{1}{t} + (D_y f)(\ln(t), t^2-3)\ .\ 2t,\ \ t \in B$$

où x et y sont respectivement la première et la seconde variable de f.

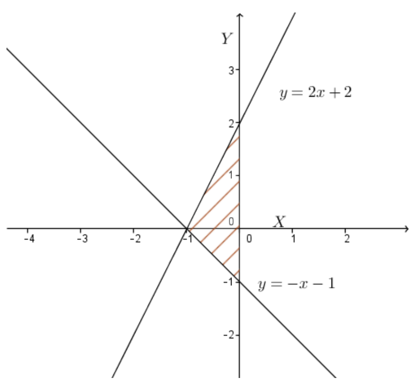
2. **Sachant que la fonction f est intégrable sur l'ensemble A considéré, permuter l'ordre d'intégration et représenter A si on a**

$$\int_{-1}^{0} \left(\int_{-x-1}^{2x+2} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Solution. L'ensemble d'intégration A est l'ensemble

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0] \ et\ y \in [-x-1, 2x+2]\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,0] \ et\ x \in [-y-1, 0]\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,2] \ et\ x \in [y/2-1, 0]\right\}$$



Il est représenté par la partie hachurée du plan ci-contre (bords compris).

Comme f est intégrable sur A, l'intégrale s'écrit aussi

$$I = \int_{-1}^{0} \left(\int_{-y-1}^{0} f(x,y)\, dx \right) dy + \int_{0}^{2} \left(\int_{y/2-1}^{0} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Test 2 du 04-03-2016

1. **a) En appliquant la définition de la dérivabilité, montrer que $f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2 - 4y^2}$ est dérivable par rapport à sa deuxième variable au point $(5,2)$.**
b) Donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.

Solution. Comme f est défini sur $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y^2 \geq 0\right\}$ et que $5^2 - 4.2^2 = 9 \geq 0$, la fonction est bien définie au point $(5,2)$.
On a $f(5,y) = \sqrt{25-4y^2}$, $f(5,2) = \sqrt{5^2 - 4.2^2} = 3$ et donc

$$\lim_{y\to 2} \frac{f(5,y) - f(5,2)}{y-2} = \lim_{y\to 2} \frac{\sqrt{25-4y^2} - 3}{y-2} = \lim_{y\to 2} \frac{25-4y^2-9}{(y-2)(\sqrt{25-4y^2}+3)}$$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{4(2-y)(2+y)}{(y-2)(\sqrt{25-4y^2}+3)} = \frac{-16}{6} = \frac{-8}{3}.$$

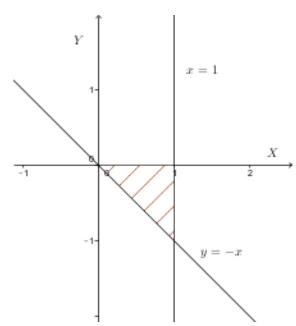
Puisque la limite existe et est finie, la fonction f est dérivable par rapport à sa deuxième variable au point $(5,2)$.
b) La valeur de sa dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable au point $(5,2)$ vaut $\frac{-8}{3}$.

2. **On donne la fonction $f : (x,y) \mapsto \sin(x^2)$ et l'ensemble**

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \in [-x,0]\}.$$

a) Représenter A.
b) Si c'est possible, calculer $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$.

Solution.



a) L'ensemble A est l'ensemble des points situés dans la partie hachurée du plan, bords compris.

b) Comme f est continue sur $\mathbb{R}^2$, elle est continue sur A, borné fermé ; elle y est donc intégrable. On a

$$\int\int_A f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^1 \left(\int_{-x}^0 \sin(x^2)\,dy\right)\,dx = \int_0^1 \sin(x^2)\left(\int_{-x}^0 dy\right)\,dx = \int_0^1 \sin(x^2)\left[y\right]_{-x}^0\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 2x\sin(x^2)\,dx = \frac{-1}{2}\left[\ \cos(x^2)\right]_0^1 = \frac{-1}{2}(\cos(1) - \cos(0)) = \frac{1-\cos(1)}{2}.$$

Test 2 du 10-03 -2016

1. On donne la fonction $f : (x,y) \mapsto \ln(\arcsin(x-2y))$.
a) Déterminer le domaine de définition A et celui de dérivabilité B et les représenter.
b) Calculer la dérivée partielle de f par rapport à sa deuxième variable

Solution. a) Le domaine de définition de f est l'ensemble

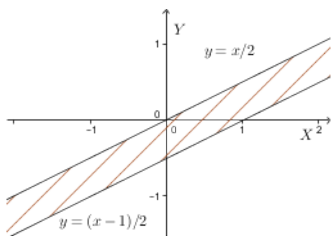
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \arcsin(x-2y) > 0, -1 \leq x-2y \leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-2y > 0, -1 \leq x-2y \leq 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x-2y \leq 1\right\}.$$

Le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \arcsin(x-2y) > 0, -1 < x-2y < 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-2y > 0, -1 < x-2y < 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x-2y < 1\right\}.$$



L'ensemble A est l'ensemble des points de la partie hachurée, les points de la droite d'équation $y = (x-1)/2$ étant compris dans A, contrairement à ceux de la droite d'équation $y = x/2$. L'ensemble B est l'ensemble des points de la partie hachurée, les points des droites étant exclus.

b) La dérivée partielle de f par rapport à sa deuxième variable est donnée par

$$D_y f(x,y) = \frac{-2}{\arcsin(x-2y)\sqrt{1-(x-2y)^2}}.$$

2. Si elle existe, que vaut l'intégrale

$$\iint_A y\sin(xy)\,dx\,dy \quad \text{sur} \quad A = [1,2] \times \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Solution. Comme la fonction $(x,y) \mapsto y\sin(xy)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, elle est continue sur A, borné fermé ; elle y est donc intégrable. On a

$$\iint_A y\sin(xy)\,dx\,dy = \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \left(\int_1^2 y\sin(xy)\,dx\right) dy = \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \Big[-\cos(xy)\Big]_1^2 dy = \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos(2y)+\cos(y))\,dy$$

$$= \left[\frac{-\sin(2y)}{2} + \sin(y)\right]_\pi^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{-\sin(3\pi)}{2} + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{\sin(2\pi)}{2} - \sin(\pi) = -1.$$

Test 2 du 11-03 -2016

1. Soit $F(x) = g(u(x), v(x))$ avec $u(-1) = 2, v(-1) = -1, (Du)(-1) = 5, (Dv)(-1) = -3,$ $(D_1g)(2, -1) = -4$ et $(D_2g)(2, -1) = -2$. En supposant satisfaites les hypothèses de dérivation des fonctions composées en -1, que vaut $(DF)(-1)$?
Note : on note D_ig la dérivée de g par rapport à sa i ème variable.

Solution. Puisque F est dérivable en -1, on a

$$(DF)(-1) = (D_1g)(u(-1), v(-1)) \,.\, (Du)(-1) + (D_2g)(u(-1), v(-1)) \,.\, (Dv)(-1)$$

$$= (D_1g)(2, -1) \,.\, (Du)(-1) + (D_2g)(2, -1) \,.\, (Dv)(-1) = (-4) \,.\, 5 + (-2) \,.\, (-3) = -20 + 6 = -14.$$

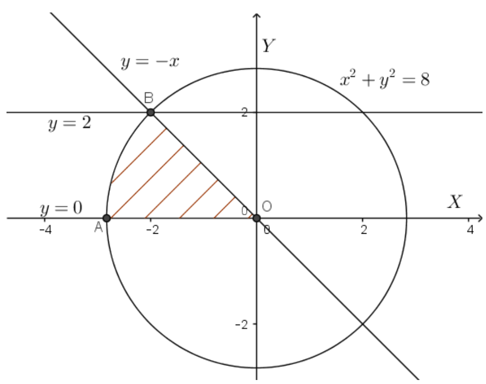
2. Sachant que la fonction f est intégrable sur l'ensemble A considéré, permuter l'ordre d'intégration et représenter A si on a

$$\int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{8-y^2}}^{-y} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Solution. L'ensemble d'intégration A est l'ensemble

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 2] \ et\ x \in [-\sqrt{8 - y^2}, -y] \right\}$$

$$= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2\sqrt{2}, -2] \ et\ y \in [0, \sqrt{8 - x^2}] \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 0] \ et\ y \in [0, -x] \right\}$$



Il est représenté par la partie hachurée du plan ci-contre (bords compris). Le rayon du cercle étant égal à $2\sqrt{2}$, les points A, B et O ont respectivement comme coordonnées $(-2\sqrt{2}, 0)$, $(-2, 2)$ et $(0, 0)$.

Comme f est intégrable sur A, l'intégrale s'écrit aussi

$$I = \int_{-2\sqrt{2}}^{-2} \left(\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x, y)\, dy \right) dx + \int_{-2}^{0} \left(\int_0^{-x} f(x, y)\, dy \right) dx.$$