1, 2, 3... Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématique (partim B) : corrigé du test 3

Version 22 avril 2016

Test 3 du 19-04-2016

1. **Etudier la convergence de la série et calculer la somme si elle converge**

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)-\cos\left(\frac{1}{n+2}\right)\right).$$

Solution. Comme

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)-\cos\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)=\sum_{n=0}^{N}\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)-\sum_{n=0}^{N}\cos\left(\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{N}\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)-\sum_{n=1}^{N+1}\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)=\cos(1)-\cos\left(\frac{1}{N+2}\right),$$

on peut calculer

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)-\cos\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\left(\cos(1)-\cos\left(\frac{1}{N+2}\right)\right)=\cos(1)-\cos(0)=\cos(1)-1$$

Par définition, la série est donc convergente et sa somme vaut $\cos(1)-1$

2. **Etudier la convergence de la série**

$$\sum_{m=3}^{+\infty}\frac{m}{m-2}.$$

Solution.
Cette série diverge car son terme général $\frac{m}{m-2}$ ne tend pas vers 0 puisque $\lim_{m\to+\infty}\frac{m}{m-2}=1$.

Test 3 du 22-04-2016

1. **Etudier la convergence de la série suivante et calculer la somme si elle converge**

$$\sum_{m=8}^{+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^{1-m}.$$

Solution. La série $\sum_{m=8}^{+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^{1-m}$ peut aussi s'écrire sous la forme $\sqrt{2}\sum_{m=8}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m}$, série géométrique convergente puisque la raison $\frac{1}{\sqrt{2}}\in]-1,1[$. La somme de cette série vaut

$$\sqrt{2}\;.\;\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8}\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2^4}.\;\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{8}.$$

2. **Etudier la convergence des séries**

$$(i)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\pi)}{2^k}, \qquad (ii)\ \sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{2k-1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$

Solution. (i) La série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\pi)}{2^k}$ peut aussi s'écrire sous la forme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^k$. Cette série géométrique converge donc puisque sa raison $\frac{-1}{2} \in]-1,1[$.

(ii) Comme

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{2k-1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2,$$

par le théorème des limites des fonctions composées, le terme général de la série converge vers

$$\lim_{k\to+\infty} \ln\left(\frac{2k-1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \ln(2) \neq 0.$$

Donc, la série diverge.

Test 3 du 26-04-2016

1. **Etudier la convergence de la série suivante et calculer la somme si elle converge**

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\ln(2))^m}{m!}.$$

Solution. La série $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\ln(2))^m}{m!}$ est convergente car c'est, au premier terme près, la valeur de la fonction exponentielle en $\ln(2)$. La somme de cette série vaut donc $\exp(\ln(2)) - 1 = 2 - 1 = 1$.

2. **Etudier la convergence de la série**

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{3^{1-k}}.$$

Solution. La série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{3^{1-k}}$ peut aussi s'écrire sous la forme $\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} k^3 3^k$, série divergente puisque le terme général de la série $k^3 3^k$ ne tend pas vers 0 mais vers $+\infty$.

Test 3 du 29-04-2016

1. **Etudier la convergence de la série suivante et calculer la somme si elle converge**

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m^2+4m+3}$$

Solution. Comme

$$\sum_{m=2}^{M} \frac{1}{m^2+4m+3} = \sum_{m=2}^{M} \frac{1}{(m+1)(m+3)} = \sum_{m=2}^{M} \left(\frac{1}{2(m+1)} - \frac{1}{2(m+3)}\right),$$

par décomposition en fractions simples, cette somme s'écrit aussi

$$\frac{1}{2}\sum_{m=2}^{M}\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+3}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{m=2}^{M}\frac{1}{m+1}-\sum_{m=2}^{M}\frac{1}{m+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{m=2}^{M}\frac{1}{m+1}-\sum_{m=4}^{M+2}\frac{1}{m+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{M+2}-\frac{1}{M+3}\right).$$

Par définition des séries, on a donc

$$\lim_{M\to+\infty}\sum_{m=2}^{M}\frac{1}{m^2+4m+3}=\frac{1}{2}\lim_{M\to+\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{M+2}-\frac{1}{M+3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{24}.$$

Par définition, la série est donc convergente et sa somme vaut $\frac{7}{24}$.

2. **Etudier la convergence de la série**

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n.$$

Solution. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$ peut aussi s'écrire sous la forme $\displaystyle-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^n$, série géométrique convergente puisque la raison $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\in]-1,1[$.