1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2015-2016

Mathématique et physique : 1er bachelier

Test du 14-09-15

Correction

Problèmes élémentaires

Rédiger une solution des problèmes simples suivants.

Mathématique :
1) Si on augmente la longueur d'un rectangle de 3 cm et qu'on diminue sa largeur de 2 cm, l'aire diminue de 19 cm^2. Par contre, si on diminue la longueur de 5 cm et qu'on augmente la largeur de 5 cm, l'aire augmente d'un quart de dm^2. Quelles sont, en cm, les dimensions du rectangle ?

Solution. Soient $L > 0$ et $l > 0$ respectivement les longueur et largeur du rectangle (exprimées en cm). Vu les modifications imposées aux dimensions et la formule de l'aire d'un rectangle, comme $1/4$ dm$^2 = 25$ cm^2, on a

$$\left\{\begin{array}{lcl}(L+3)(l-2) & = & Ll-19\\ (L-5)(l+5) & = & Ll+25\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}Ll-2L+3l-6 & = & Ll-19\\ Ll+5L-5l-25 & = & Ll+25\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}-2L+3l & = & -13\\ 5L-5l & = & 50\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}L & = & 17\\ l & = & 7\end{array}\right.$$

Dès lors, la longueur et la largeur du rectangle mesurent respectivement 17 cm et 7 cm.

2) Si le réel exprimant l'aire d'un triangle équilatéral évaluée en dm^2 est égal au réel exprimant son périmètre évalué en mètres, que vaut la longueur du côté de ce triangle exprimée en centimètres ?

Solution. Soit $x > 0$ la longueur en centimètres du côté du triangle équilatéral.
L'aire du triangle évaluée en dm^2 vaut $\frac{1}{2}\,x\cdot x\sin(\frac{\pi}{3})\,.10^{-2} = \frac{1}{2}\,x^2\sin(\frac{\pi}{3})\,.10^{-2} = \frac{1}{2}\,x^2\frac{\sqrt{3}}{2}\,.10^{-2}$ et le périmètre évalué en m vaut $3x\,.10^{-2}$.
Puisque le réel exprimant l'aire en dm^2 est égal au réel exprimant son périmètre en m, on a l'égalité

$$x^2\frac{\sqrt{3}}{4}\,.10^{-2} = 3x\,.10^{-2} \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2-12x=0 \Leftrightarrow x(\sqrt{3}x-12)=0 \Leftrightarrow x=0 \;\text{ ou }\; x=4\sqrt{3}.$$

Dès lors, la longueur du côté du triangle vaut $4\sqrt{3}$ cm .

Physique :
On jette une balle, verticalement vers le haut, de la corniche d'un building avec une vitesse de 14 m/s. L'accélération de la pesanteur étant considérée comme égale à 10 m/s^2, quelles seront la position et la vitesse de la balle 1 s après le lancement ?

Solution. Considérons comme position initiale la corniche du building. La vitesse initiale v_0 vaut 14 m/s et l'accélération est considérée comme égale à -10 m/s^2. Puisque la vitesse est exprimée par $v(t) = -10\,t + v_0 = -10\,t + 14$ et la distance totale parcourue par $e(t) = -\frac{10}{2}t^2 + 14\,t + e_0 = -5\,t^2 + 14\,t$, on a, après une seconde, $v(1) = -10 + 14 = 4$ et $e(1) = -5 + 14\,t = 9$.
Une seconde après le lancement, la vitesse de la balle est donc de 4 m/s et la balle est à 9 m au-dessus de la corniche.

Transcodage

1. **Exprimer en français la propriété ci-dessous (ATTENTION : ne pas se limiter à une lecture de symboles. Par exemple, on exprime ≪ $a+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ ≫ par ≪ la somme de deux réels ≫ et non ≪ a plus b avec a, b appartenant à $\mathbb{R}$ ≫) :**

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b),\ a, b \in]0, +\infty[$$

Solution. Le logarithme d'un produit de deux réels strictement positifs vaut la somme des logarithmes de chacun de ces réels.

2. **Exprimer en symboles mathématiques la phrase entre guillemets :**
≪ L'énergie cinétique d'un corps est égale à la moitié du produit de sa masse par le carré de sa vitesse. ≫

Solution. L'énergie cinétique E_c d'un corps de masse m animé d'une vitesse v est donnée par

$$E_c = \frac{mv^2}{2}.$$

Techniques de calcul

1. Résoudre (x est une inconnue réelle)

(a) $\frac{5x}{3} - \frac{x+1}{2} = \frac{x}{4}$ **(b)** $2x = 2 - x^2$ **(c)** $x + 2 \leq \frac{3}{2-x}$

Solution.
1. (a) On a

$$\frac{5x}{3} - \frac{x+1}{2} = \frac{x}{4} \Leftrightarrow \frac{20x - 6x - 6}{12} = \frac{3x}{12} \Leftrightarrow 11x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{11}.$$

Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \left\{\frac{6}{11}\right\}$.

(b) L'équation donnée est équivalente à $x^2 + 2x - 2 = 0$. Comme son discriminant (ou réalisant) vaut
$\Delta = (2)^2 - 4.1.(-2) = 12$, les solutions sont $\frac{-2-2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}$ et $\frac{-2+2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$.
Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \left\{-1-\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3}\right\}$.

(c) Si $x \neq 2$, l'inéquation donnée est équivalente à $\frac{4 - x^2 - 3}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{2-x} \leq 0$. En étudiant le signe du premier membre, on a $x \in]-\infty, -1]$ ou $x \in [1, 2[$.
Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S =]-\infty, -1] \cup [1, 2[$.

2. **Résoudre (x est une inconnue réelle)** $\sin(2x) + \frac{1}{2} = 0$.
Donner les solutions qui appartiennent à $[\pi, 2\pi]$.

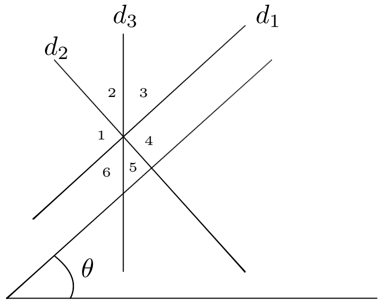
Solution. L'équation donnée est équivalente à $\sin(2x) = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$ qui a pour solutions

$$\left(2x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \pi - \left(\frac{-\pi}{6}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{-\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right).$$

L'ensemble des solutions dans $[\pi, 2\pi]$ est alors $S = \left\{\frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right\}$.

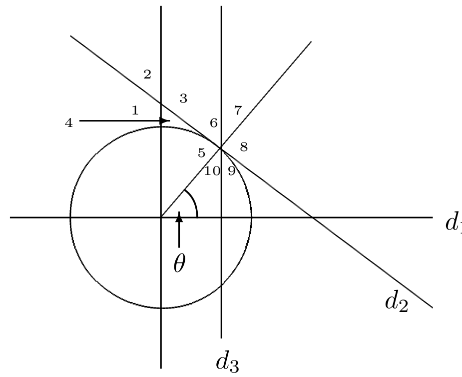
Représentation graphique

1. (a)



d_1 est parallèle au plan incliné
d_2 est perpendiculaire au plan incliné
d_3 est perpendiculaire au plan horizontal

(b)



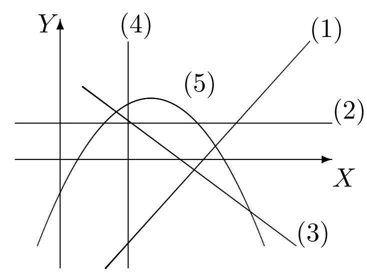
d_3 est perpendiculaire à d_1
d_2 est tangente au cercle

Entourer clairement le numéro de tous les angles (s'il y en a) dont la mesure est égale à θ pour chacune des figures.

Solution. Dans la figure (a), les angles dont la mesure est égale à θ sont numérotés 2 et 5 ; dans la figure (b), ils sont numérotés 2, 4, 6 et 9.

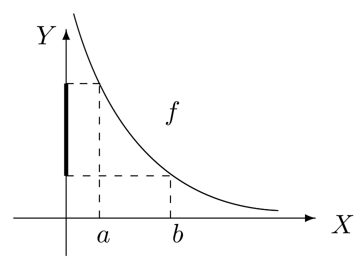
2. Dans la colonne prévue, indiquer le numéro de la représentation graphique qui correspond à l'équation, 0 sinon et A pour abstention.

0	Eq. 1	$y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ ($a_1 < 0$; $b_1,\ c_1 > 0$)
2	Eq. 2	$y = a_2$ ($a_2 \neq 0$)
4	Eq. 3	$x = b_2$ ($b_2 \neq 0$)
0	Eq. 4	$y = a_3x + b_3$ ($a_3 < 0,\ b_3 < 0$)
1	Eq. 5	$y = a_4x + b_4$ ($a_4 > 0,\ b_4 < 0$)



3. Pour chacun des items suivants, indiquer V pour vrai, F pour faux, A pour abstention dans la colonne laissée libre à cet effet. Sur le graphique ci-contre, la longueur du segment représenté en gras est :

F	1) $b - a$
F	2) $f(a - b)$
F	3) $f(b) - f(a)$
V	4) $f(a) - f(b)$
F	5) $(a, f(a)) - (b, f(b))$



QCM (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède.

1. Si on divise par deux la longueur du côté d'un cube, alors
   ☐ le volume du cube est divisé par 6 ☐ l'aire d'une face du cube est divisée par 2
   ☐ le périmètre d'une face du cube est divisé par 4 ☐ une donnée est manquante
   ♣ aucune des propositions précédentes n'est correcte
2. Par rapport à la population actuelle, la population d'une commune rurale diminue de 2% par an. Dans deux ans, sa population aura diminué
   ☐ de 2% ♣ de plus de 2% et moins de 4% ☐ de 4% ☐ de plus de 4%
   ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte
3. Les quatre septièmes du volume d'un récipient sont remplis d'eau. On retire alors une quantité d'eau égale aux deux tiers de ce volume d'eau. Au total, quelle est la part du volume du récipient

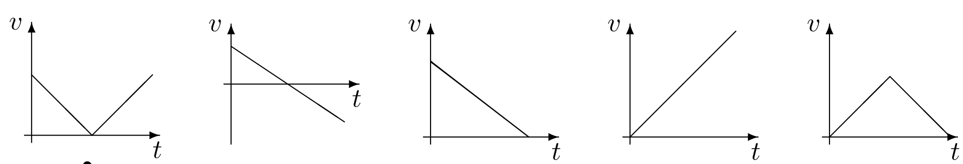
remplie d'eau ?

♣ 4/21 ☐ 1/2 ☐ 17/21 ☐ 20/21 ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte

4. La fréquence d'un pendule est donnée par $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$, où g désigne l'accélération de la pesanteur et l la longueur du pendule. Si la longueur l_1 d'un pendule de fréquence ν_1 est double de l_2, longueur d'un pendule de fréquence ν_2, alors ν_1 vaut

   ☐ le double de ν_2. ☐ la moitié de ν_2. ☐ le produit de ν_2 par $\sqrt{2}$.
   ♣ le quotient de ν_2 par $\sqrt{2}$. ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte

5. A partir du sol, on lance un objet verticalement vers le haut, dans la direction des y positifs. L'objet monte puis retombe sur le sol. On néglige l'influence de l'air sur le mouvement de l'objet et on suppose qu'il ne rebondit pas.
   Lequel des diagrammes suivants représentant le module v de la vitesse de l'objet en fonction du temps t, entre l'instant où il quitte la main du lanceur et l'instant où il touche le sol correspond à la situation décrite ci-dessus ?



♣ ☐ ☐ ☐ ☐