

1. Transformées de Fourier et produit de convolution

Exercice 1. Si possible, calculer les transformées de Fourier des fonctions f_1 , f_2 et f_3 définies sur \mathbb{R} par

$$f_1(x) = xe^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x), \quad f_2(x) = e^{ix}e^{-|x|} \quad \text{et} \quad f_3(x) = e^{-|x-1|}.$$

Exercice 2. Soient $a, b \in]0, +\infty[$ et $c \in \mathbb{R}$.

(i) Déterminer si possible les transformées de Fourier de la fonction f_a définie par $f_a(x) = e^{-a|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Faire de même avec la fonction g_a définie par $g_a(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(iii) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(cx)}{x^2 + a^2} dx.$$

(iv) En utilisant le théorème de transfert, calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}.$$

(v) Calculer si possible

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \sin(x) dx.$$

Exercice 3. (i) Si possible, déterminer les transformées de Fourier des fonctions f et g (d'une variable réelle) définies par

$$f(x) = \sin(x)\chi_{[-\pi, \pi]}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 1}.$$

(ii) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sin^2(\pi x)}{(x^2 - 1)^2} dx.$$

Exercice 4. (i) Si possible, déterminer les transformées de Fourier des fonctions f et g (d'une variable réelle) définies par

$$f(x) = (1 - x^2)\chi_{[-1, 1]}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^3}.$$

(ii) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(x \cos(x) - \sin(x))^2}{x^6} dx.$$

Exercice 5. (i) Si possible déterminer le produit de convolution des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = x.$$

(ii) Même question avec

$$f(x) = e^x \chi_{[1, +\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = x \chi_{[-1, +\infty[}(x).$$

Exercice 6. (i) S'il est défini, déterminer le produit de convolution des fonctions $\chi_{[-1, 1]}$ et $\chi_{[-2, 2]}$.

(ii) Si possible, calculer

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sin(x) \sin(2x)}{x^2} dx.$$

Exercice 7. (i) Si possible, déterminer le produit de convolution des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

(ii) Représenter graphiquement les fonctions f , g et $f \star g$.