Corrigé de l'Examen écrit du 24 août 2016

Consignes
- L'examen dure **3h00**.
- Répondre aux différentes questions sur des **feuilles séparées**, en y indiquant à chaque fois vos **nom, prénom et section**.
- **Justifier toutes vos réponses**. La rédaction, la précision et la clarté de vos raisonnements entreront en compte dans la cote finale de l'examen.

Théorie

Théorie 1.

(a) Définir la notion de transformée de Fourier d'une fonction intégrable dans $\mathbb{R}$.

(b) Énoncer et démontrer le théorème dit « de transfert » dans le cas des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$.

(c) En vous servant du théorème de dérivation des intégrales paramétriques (et en vérifiant toutes les hypothèses de celui-ci !), démontrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, de même que $g : x \mapsto xf(x)$, alors la transformée de Fourier de f est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $D_y(\mathcal{F}^+ f)(y) = i(\mathcal{F}^+ g)(y)$ quel que soit $y \in \mathbb{R}$.

Solution : Cf. cours.

Théorie 2.

(a) Énoncer le développement limité de Taylor à l'ordre deux pour une fonction deux fois continûment dérivable dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(b) Définir la notion de point stationnaire.

(c) Énoncer le développement de Taylor à l'ordre deux dans le cas d'un point stationnaire et expliquer pourquoi on considère le développement en un tel point dans la recherche des extrema.

Solution : Cf. cours.

Exercices

Exercice 1. On considère les fonctions f et g (d'une variable réelle) définies par

$$f(x) = \cos(x)\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\cos(\pi x/2)}{1-x^2}.$$

(a) Calculer (si possible) les transformées de Fourier (+ et -) de f.

(b) Si cela a du sens, faire de même avec g.

(c) Si possible, calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\cos^2(\pi x/2)}{(1-x^2)^2}\, dx.$$

Solution :

(a) Remarquons que la fonction f est bien intégrable sur $\mathbb{R}$, car elle est intégrable sur l'intervalle borné fermé $[-\pi/2, \pi/2]$ (par continuité) et nulle en-dehors. Ainsi, si $y \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^{\pm} f &= \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy} \cos(x) \chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(x)\, dx \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} \cos(xy)\cos(x)\, dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos((1-y)x)\, dx + \int_0^{\pi/2} \cos((1+y)x)\, dx.
\end{aligned}$$

Or, on a

$$\int_0^{\pi/2} \cos((1-y)x)\, dx = \begin{cases} \left[\frac{\sin((1-y)x)}{1-y}\right]_0^{\pi/2} & \text{si } y \neq 1 \\ \int_0^{\pi/2} 1\, dx \text{ si } y = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sin((1-y)\pi/2)}{1-y} & \text{si } y \neq 1 \\ \frac{\pi}{2} \text{ si } y = 1. \end{cases}$$

De même,

$$\int_0^{\pi/2} \cos((1+y)x)\, dx = \begin{cases} \left[\frac{\sin((1+y)x)}{1+y}\right]_0^{\pi/2} & \text{si } y \neq -1 \\ \int_0^{\pi/2} 1\, dx \text{ si } y = -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sin((1+y)\pi/2)}{1+y} & \text{si } y \neq -1 \\ \frac{\pi}{2} \text{ si } y = -1. \end{cases}$$

Comme $\sin(\pi/2 - \pi y/2) = \sin(\pi/2 + \pi y/2) = \cos(\pi y/2)$ et comme $\cos(\pi/2) = \cos(-\pi/2) = 0$, on en déduit que

$$\mathcal{F}_y^{\pm} f = \begin{cases} \frac{2\cos(\pi y/2)}{1-y^2} & \text{si } y \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \\ \frac{\pi}{2} \text{ si } y \in \{-1,1\}. \end{cases}$$

(b) On remarque que g est continu sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Mais vu que $g = \frac{1}{2}\mathcal{F}^{\pm} f$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ et que toute transformée de Fourier est continue sur $\mathbb{R}$, il en découle que g admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$. En outre, on a $\lim_{x\to\pm\infty} |x|^{3/2}|g(x)| = 0$, ce qui prouve que g est intégrable sur $\mathbb{R}$. Une autre façon de justifier l'intrégrabilité de g est d'appliquer les critères de comparaison, puisque $|g(x)| \leq 2/x^2$ si $x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ et puisque la fonction $x \mapsto 2/x^2$ est intégrable en $-\infty$ et $+\infty$. Dès lors, pour $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{F}_y^{\pm} g = \frac{1}{2}\mathcal{F}_y^{\pm}\mathcal{F}^{\mp} f = \pi f(y) = \pi\cos(y)\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(y)$$

par le théorème de Fourier et car f est continu sur $\mathbb{R}$.

(c) De nouveau, on voit que la fonction à intégrer (à savoir g^2) est intégrable sur $]-\infty, 0[$ car elle admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$ tout entier et $\lim_{x\to-\infty} x^3 g^2(x) = 0$ (on peut aussi utiliser un critère de comparaison comme ci-dessus). On a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 \frac{\cos^2(\pi x/2)}{(1-x^2)^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} g^2(x)\, dx \\
&= \frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{F}_x^{+} f\right)\left(\mathcal{F}_x^{-} f\right)\, dx \\
&= \frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\mathcal{F}_x^{+}\mathcal{F}^{-} f\right)\, dx \qquad \text{par le théorème de transfert} \\
&= \frac{\pi}{4}\int_{\mathbb{R}} f^2(x)\, dx \qquad \text{par le théorème de Fourier} \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\, dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{2}\, dx \\
&= \frac{\pi}{4}\left[x + \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}$$

Exercice 2. On considère les fonctions f et g (de deux variables réelles) définies par

$$f(x,y) = \ln(\ln(x)) - \ln(xy) + 2y^2 \quad \text{et} \quad g(x,y) = x^2 + 4y^2.$$

(a) Représenter le domaine de définition de f, puis rechercher les éventuels extrema libres des fonctions f et g. Préciser s'ils sont globaux ou non, stricts ou non stricts.

(b) S'ils existent, déterminer les extrema globaux de g sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine.

(c) En déduire (s'ils existent) les extrema globaux de g dans l'ensemble (à représenter)

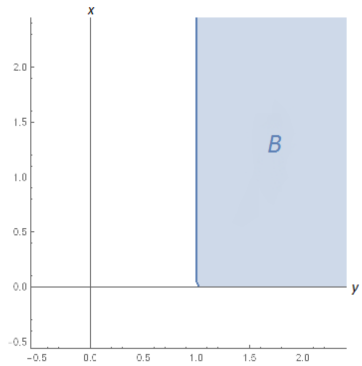
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\right\}.$$

Solution :

(a) On voit que la fonction f est définie et de classe C_2 sur l'ensemble

$$B :=]1, +\infty[\times]0, +\infty[,$$

dont voici une représentation (les bords étant non compris) :



Recherchons les points stationnaires de f :

$$\begin{cases} D_x f(x,y) = 0 \\ D_y f(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x\ln(x)} - \dfrac{1}{x} = 0 \\ -\dfrac{1}{y} + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) = 1 \\ y^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e \\ y = \pm\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Vu le domaine de définition et dérivabilité de f, on en déduit qu'il n'existe qu'un seul point stationnaire : $(e, 1/2)$. Nous allons déterminer s'il s'agit d'un extremum de f grâce à sa matrice hessienne. On a

$$D_x^2 f(x,y) = \frac{-\ln(x) - 1}{x^2 \ln^2(x)} + \frac{1}{x^2}, \quad D_x D_y f(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad D_y^2 f(x,y) = \frac{1}{y^2} + 4,$$

de sorte que

$$H_f(e, 1/2) = \begin{pmatrix} -1/e^2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \det(H_f(e,1/2)) = -8/e^2 < 0.$$

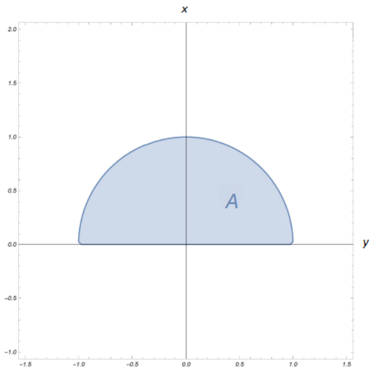
Dès lors, $(e, 1/2)$ n'est pas un extremum pour f et par conséquent f n'admet aucun extremum sur son domaine.

En ce qui concerne g, il est clair que $g \in C_2(\mathbb{R}^2)$ et que $D_x g(x,y) = 2x$ et $D_y g(x,y) = 8y$. Donc g admet un seul point stationnaire, à savoir $(0,0)$, qui est un minimum global strict de g vu sa définition.

(b) On recherche les extrema de g sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine, noté C. Si $(x,y) \in C$, alors on a $x^2 + y^2 = 1$, ce qui implique que $g(x,y) = 3y^2 + 1$. Autrement dit, on recherche les extrema de la fonction $g' : y \mapsto 3y^2 + 1$ sur $[-1, 1]$. Vu la forme de g', on voit alors qu'il admet un minimum global strict en $y = 0$ et deux maxima globaux non stricts en $y = -1$ et $y = 1$ (car $g(1) = g(-1) = 4$).

Dès lors, sur C, g admet des maxima globaux non stricts en $(0, -1)$ et $(0, 1)$ et des minima globaux non stricts en $(-1, 0)$ et $(1, 0)$.

(c) L'ensemble A peut être représenté comme suit (les bords sont compris) :



Comme il s'agit d'un ensemble borné fermé et comme g est continu sur celui-ci, il y admet au moins un minimum global et un maximum global.

On va procéder en plusieurs étapes et rechercher les extrema sur les différentes parties constituant A :

- À l'intérieur de A, vu le point (a), on sait que g n'y admet aucun extremum.
- Sur le demi-cercle supérieur, par le point (b), g admet un maximum en $(0,1)$ et deux minima en $(-1,0)$ et $(1,0)$.
- Le segment inférieur est paramétré par $(x,0)$ avec $x \in [-1,1]$. Comme $g(x,0) = x^2/2$, on en déduit que g admet sur ce segment un minimum en $(0,0)$ et deux maxima en $(-1,0)$ et $(1,0)$.

Vu le point (a), on sait déjà que $(0,0)$ est minimum global strict de g sur $\mathbb{R}^2$, donc aussi en particulier sur A. En outre, les points de coordonnées $(1,0)$ et $(-1,0)$ étant maxima sur le segment inférieur et minima sur le demi-cercle supérieur, on en déduit que seul $(0,1)$ est maximum global (strict) de g sur A.