6. Suites convergentes

Exercice 1. Soit α un paramètre réel. Étudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$, lorsque son terme général x_m est égal à

(i) $\dfrac{\alpha^m}{1+\alpha^m}$ (ii) $\sqrt[m]{m^\alpha}$ (iii) $\dfrac{(m!)^2}{(2m)!}$ (iv) $\sqrt{m+\sqrt{m+\sqrt{m}}}-\sqrt{m}$

(v) $\dfrac{1}{m^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}k$ (vi) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(m+j)^2}$ (vii) $\sqrt[m^2]{m!}$ (viii) $\sin^4(m)+m^2\cos^6(3m)-2m^3$.

Exercice 2. On définit la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ par la relation de récurrence

$$x_0>0 \quad \text{et} \quad x_{m+1}=\sqrt{\frac{2x_m}{x_m^2+1}}, \quad m\in\mathbb{N}.$$

Cette suite converge-t-elle vers une limite finie ? Si oui, que vaut-elle ?

Exercice 3 (Processus de Héron). Soit $a>0$. On définit la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ suivant la relation de récurrence

$$x_0>0 \quad \text{et} \quad x_{m+1}=\frac{1}{2}\left(x_m+\frac{a}{x_m}\right), \quad m\in\mathbb{N}.$$

Étudier la convergence de cette suite.

Exercice 4. Considérons la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ définie par la relation de récurrence

$$x_0>0 \quad \text{et} \quad x_{m+1}=\frac{x_m(2x_m^2+1)}{x_m^2+5}, \quad m\in\mathbb{N}.$$

Cette suite converge-t-elle vers une limite finie ? Si oui, que vaut-elle ?