Corrigé de l'Examen écrit du 25 janvier 2017

Question 1. On considère les fonctions f et g (d'une variable réelle) définies par

$$f(x) = |x|e^{-|x|} \qquad \textbf{et} \qquad g(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

(a) Calculer (si possible) les transformées de Fourier (+ et -) de f.

(b) Si cela a du sens, faire de même avec g.

(c) Si possible, calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^4}\, dx.$$

Solution :

(a) NB : un calcul très similaire a été fait en répétitions.

Bien sûr, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ car elle y est continue et vérifie $\lim_{x\to\pm\infty} x^2|f(x)| = 0$: ses transformées de Fourier sont donc bien définies. Ainsi, pour $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^{\pm} f &= \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy}|x|e^{-|x|}\, dx \\
&= 2\int_0^{+\infty} \cos(xy) x e^{-x}\, dx \\
&= 2\Re\left(\int_0^{+\infty} x e^{(iy-1)x}\, dx\right) \\
&= 2\Re\left(\left[x\frac{e^{(iy-1)x}}{iy-1}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{(iy-1)x}}{iy-1}\, dx\right).
\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty} \left|xe^{(iy-1)x}\right| = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \left|e^{(iy-1)x}\right| = 0$, on en déduit que

$$\mathcal{F}_y^{\pm} f = -2\Re\left(\left[\frac{e^{(iy-1)x}}{(iy-1)^2}\right]_0^{+\infty}\right) = 2\Re\left(\frac{1}{(iy-1)^2}\right) = 2\Re\left(\frac{(iy+1)^2}{(y^2+1)^2}\right) = \frac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2}.$$

(b) De nouveau, g est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisqu'il y est continu et $\lim_{x\to\pm\infty} |x|^{3/2}|g(x)| = 0$. Pour $y \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}_y^{\pm} g = \mathcal{F}_y^{\pm}\left(\frac{1}{2}\mathcal{F}^{\mp} f\right) = \pi f(y),$$

par le théorème de Fourier car f est continu sur $\mathbb{R}$.

(c) On montre comme précédemment que la fonction à intégrer (à savoir g^2) est bien intégrable sur $]0,+\infty[$. Il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^4}\, dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} g^2(x)\, dx = \frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_x^+ f \mathcal{F}_x^- f\, dx = \frac{\pi}{4}\int_{\mathbb{R}} f^2(x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}\, dx$$

en utilisant les théorèmes de transfert et de Fourier. Dès lors, si on applique deux intégrations par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^4}\,dx &= \frac{\pi}{2}\left(\left[x^2\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\left[x\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx\right) \\
&= -\frac{\pi}{8}\left[e^{-2x}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Question 2. On considère les fonctions f et g (de deux variables réelles) définies par

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + y^4 - 2y^3 \quad \textbf{et} \quad g(x,y) = 2x + y^3.$$

(a) Rechercher les éventuels extrema libres des fonctions f et g. Préciser s'ils sont globaux [1] ou non, stricts ou non stricts.

(b) S'ils existent, déterminer les extrema globaux de g sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine.

(c) En déduire (s'ils existent) les extrema globaux de g dans l'ensemble (à représenter)

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \le 1, \quad x \le 0 \quad \textbf{et} \quad y \le 0\right\}.$$

Solution :

(a) D'abord, on vérifie que f et g sont tous les deux de classe C_2 sur $\mathbb{R}^2$. Ensuite, on recherche les points stationnaires de f :

$$\begin{cases} D_x f(x,y) = 0 \\ D_y f(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y) = 0 \\ -2x + 4y + 4y^3 - 6y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2y(2y^2 - 3y + 1) = 0. \end{cases}$$

Comme $\Delta := 3^2 - 4.2.1 = 1$, on voit que la deuxième équation ci-dessus est vérifiée lorsque $y = 0$, $y = 1/2$ et $y = 1$. La fonction f admet donc trois points stationnaires : $(0,0)$, $(1/2, 1/2)$ et $(1,1)$. Or, la matrice hessienne de f est donnée par

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 + 12y^2 - 12y \end{pmatrix}.$$

Vu que $\det(H_f(0,0)) = \det(H_f(1,1)) = 4 > 0$ et que $D_x^2 f(0,0) = D_x^2 f(1,1) = 2 > 0$, on en déduit que $(0,0)$ et $(1,1)$ sont des minima locaux stricts de f. Par contre, $\det(H_f(1/2,1/2)) = -2 < 0$, ce qui implique que $(1/2,1/2)$ n'est pas un extremum de f.
Pour étudier la globalité des extrema trouvés, on constate que

$$f(x,y) = (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2y^3 + y^4) = (x-y)^2 + y^2(y-1)^2 \ge 0 = f(0,0) = f(1,1),$$

ce qui prouve que $(0,0)$ et $(1,1)$ sont des minima globaux non stricts.
En ce qui concerne la fonction g, celle-ci n'admet aucun extremum libre car elle vérifie $D_x(g(x,y)) = 2 \ne 0$ quel que soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

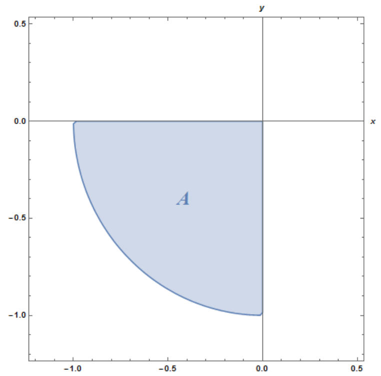
(b) On sait que g est continu sur le cercle centré à l'origine et de rayon 1, qui est borné fermé : ainsi g y admet au moins un maximum et un minimum globaux. Pour les trouver, on peut utiliser les multiplicateurs de Lagrange en résolvant

$$\begin{cases} D_x g(x,y) = \lambda D_x(x^2+y^2-1) \\ D_y g(x,y) = \lambda D_y(x^2+y^2-1) \\ x^2+y^2 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x = 1 \\ 3y^2 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \\ \lambda = \pm 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3y = 2\lambda \\ \lambda x = 1 \\ x^2+y^2 = 1. \end{cases}$$

Au niveau du deuxième système, si on injecte les deux premières équations dans la troisième, on obtient $x^2 + \frac{4}{9x^2} = 1 \Leftrightarrow 9x^4 - 9x^2 + 4 = 0$. Or cette dernière équation n'admet aucune solution réelle, étant donné que son discriminant vaut $-63 < 0$.
Il n'y a donc que deux "candidats-extrema", à savoir $(1,0)$ et $(-1,0)$, qui sont respectivement maximum global et minimum global de g sur le cercle étudié.

1. **Suggestion :** pour la globalité des extrema de f, penser à utiliser la factorisation et les produits remarquables.

(c) L'ensemble A peut se représenter comme suit :



De nouveau, g admet un maximum global et un minimum global sur A car il est continu sur ce borné fermé. Recherchons les extrema sur les "sous-parties" de A :

1. à l'intérieur de A, g n'admet aucun extremum vu le point (a) ;
2. sur le quart de cercle, g admet un minimum global en $(-1, 0)$ vu le point (b) ;
3. sur le segment $[-1, 0] \times \{0\}$, g s'écrit
$$g(x, 0) = 2x, \quad \text{avec} \quad x \in [-1, 0]$$
et donc y atteint son minimum en $(-1, 0)$ et son maximum en $(0, 0)$;
4. sur le segment $\{0\} \times [-1, 0]$, g s'écrit
$$g(0, y) = y^3, \quad \text{avec} \quad y \in [-1, 0]$$
et donc y atteint son minimum en $(0, -1)$ et son maximum en $(0, 0)$.

En comparant les valeurs prises au niveau de ces différents points, on en déduit que g atteint sur A son minimum global en $(-1, 0)$ et son maximum global en $(0, 0)$.

Question 3. On donne le point P de coordonnées $(1, 3, -2)$ ainsi que la droite d et le plan Π d'équations cartésiennes respectives

$$d \equiv \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x - z = -2 \end{cases} \quad \textbf{et} \quad \Pi \equiv 2x - 3y + 2z - 1 = 0.$$

(a) Donner des équations paramétriques du plan Π.

(b) La droite d et le plan Π sont-ils parallèles, sécants, orthogonaux ? Justifier.

(c) S'il existe, donner une équation cartésienne du plan Π_0 contenant la droite d et orthogonal au plan Π.

(d) Calculer la distance entre le point P et le plan Π.

Solution :

(a) Un point de Π est donné par $P_0(2, 1, 0)$ et deux vecteurs directeurs linéairement indépendants de Π (vérifiant $2x - 3y + 2z = 0$) sont donnés par $\vec{v_1}(1, 0, -1)$ et $\vec{v_2}(3, 2, 0)$. Dès lors, des équations paramétriques de Π sont données par

$$\begin{cases} x = 2 + r + 3s \\ y = 1 + 2s \\ z = -r \end{cases} \quad \text{avec} \quad r, s \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Un vecteur normal à Π est donné par $\vec{n}(2, -3, 2)$, tandis que le vecteur $\vec{v}$ de composantes

$$(2, -3, 0) \wedge (1, 0, -1) = (3, 2, 3)$$

est vecteur directeur de d. On vérifie de suite que $\vec{v}.\vec{n} = 6 \neq 0$, ainsi Π et d ne sont pas parallèles et sont donc sécants. En outre, $\vec{v}$ et $\vec{n}$ ne sont pas multiples l'un de l'autre, ce qui implique que Π et d ne sont pas orthogonaux.

(c) Un tel plan Π_0 admet une équation cartésienne de la forme

$$r(2x-3y-4)+s(x-z+2)=0,$$

avec $(r,s)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Le vecteur de composantes $(2r+s,-3r,-s)$ étant normal à Π_0, ce plan est orthogonal à Π si et seulement si

$$(2r+s).2+(-3r).(-3)+(-s).2=0\Leftrightarrow r=0.$$

Au total, $\Pi_0\equiv x-z+2=0$.

(d) La distance demandée vaut

$$\mathrm{d}(P,\Pi)=\frac{|2.1-3.3+2.(-2)-1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+2^2}}=\frac{12\sqrt{17}}{17}.$$

Question 4. Soient f et g les fonctions d'une variable réelle définies respectivement par $f(x)=|x|$ sur $[-\pi,\pi]$ et $g(x)=\cos^2(2x)$ sur $[-\pi/4,\pi/4]$.

(a) Si possible, développer f en série trigonométrique de Fourier dans $\mathbf{L}^2([-\pi,\pi])$. Simplifier au maximum la solution finale et l'exprimer uniquement au moyen de fonctions sinus et cosinus.

(b) En déduire les sommes des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\quad\textbf{et}\quad\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)^4},$$

puis celle de

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^4}.$$

(c) Même question qu'au point (a), mais cette fois pour la fonction g dans $\mathbf{L}^2([-\pi/4,\pi/4])$.

Solution :

(a) Bien sûr, $f\in\mathrm{L}^2([-\pi,\pi])$, par continuité sur le borné fermé $[-\pi,\pi]$. Ensuite, une base de $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi])$ est donnée par les fonctions

$$u_0:x\mapsto\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad u_m:x\mapsto\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mx)\quad\text{et}\quad v_m:x\mapsto\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)$$

avec $m\in\mathbb{N}_0$. Avec ces notations, on calcule d'abord

$$r_0:=<f,u_0>_{\mathrm{L}^2([-\pi,\pi])}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ensuite,

$$r_m:=<f,u_m>_{\mathrm{L}^2([-\pi,\pi])}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(mx)\,dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}x\cos(mx)\,dx$$

et, en intérgant par parties,

$$r_m=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\left[x\frac{\sin(mx)}{m}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin(mx)}{m}\,dx\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\cos(mx)}{m^2}\right]_0^{\pi}=\begin{cases}0\text{ si }m\text{ est pair;}\\ \frac{-4}{\sqrt{\pi}m^2}\text{ si }m\text{ est impair.}\end{cases}$$

Enfin, en utilisant l'imparité, on obtient $s_m:=<f,v_m>_{\mathrm{L}^2([-\pi,\pi])}=0$. Au total, le développement en série trigonométrique de Fourier de f dans $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi])$ est

$$f(x)=r_0u_0(x)+\sum_{m=1}^{+\infty}(r_mu_m(x)+s_mv_m(x))=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\cos((2m+1)x)}{(2m+1)^2},$$

la convergence se faisant dans $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi])$ et pour presque tout $x\in[-\pi,\pi]$.

(b) Comme f est croissant et borné sur $[-\pi,\pi]$ et est continu en 0, on a

$$0 = |f(0)| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} \Leftrightarrow \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

En outre, vu que $\|f\|^2_{\mathrm{L}^2([-\pi,\pi])} = \int_{-\pi}^{\pi}|x|^2\,dx = \frac{2\pi^3}{3}$, le théorème de Parseval donne

$$\frac{2\pi^3}{3} = |r_0|^2 + \sum_{m=1}^{+\infty}(|r_m|^2 + |s_m|^2) = \frac{\pi^3}{2} + \frac{16}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)^4} \Leftrightarrow \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Finalement, on a

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^4} = \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2m)^4} + \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{1}{16}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^4} + \frac{\pi^4}{96},$$

donc, en isolant la série recherchée, on obtient

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(c) Ici aussi, par continuité sur un borné fermé, on a bien $g \in \mathrm{L}^2([-\pi/4,\pi/4])$. De plus, une base de $\mathrm{L}^2([-\pi/4,\pi/4])$ est donnée par

$$u_0' : x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad u_m' : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos(4mx) \quad \text{et} \quad v_m' : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin(4mx)$$

avec $m \in \mathbb{N}_0$. Or, en utilisant la formule de Carnot, on obtient

$$g(x) = \cos^2(2x) = \frac{1+\cos(4x)}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}u_0'(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{4}u_1'(x)$$

quel que soit $x \in [-\pi/4,\pi/4]$.

Question 5.

(a) Étudier la convergence de la suite

$$\left(\frac{2^m\sin(m\pi/4)}{m!}\right)_{m\in\mathbb{N}}.$$

(b) On fixe $a > 0$ et on définit la suite réelle $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ par récurrence selon les relations

$$x_0 \geq 0 \quad \textbf{et} \quad x_{m+1} = \sqrt{a + x_m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Cette suite converge-t-elle vers une limite finie ? Si oui, que vaut cette limite ?

(c) Déduire du point précédent que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \sqrt{2}$, $u_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $u_2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, et ainsi de suite, converge vers 2.

Solution :

(a) NB : Un exercice similaire a été fait en répétitions.

Pour $m \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\left|\frac{2^m\sin(m\pi/4)}{m!}\right| \leq \frac{2^m}{m!} = \frac{2}{m}\underbrace{\frac{2}{m-1}}_{\leq 1}\underbrace{\cdots}_{\leq 1}\underbrace{\frac{2}{2}}_{\leq 1}\frac{2}{1} \leq \frac{4}{m},$$

on conclut donc par le théorème de l'étau que la suite de l'énoncé converge vers 0.

(b) La suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est bien sûr définie et vérifie $x_m \geq 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
Supposons dans un premier temps que la suite converge vers un réel $x \geq 0$. Celui-ci vérifie alors

$$x = \sqrt{a+x} \Leftrightarrow x^2 = a + x \Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \quad \text{car } x \geq 0.$$

Montrons que la suite converge effectivement vers $(1+\sqrt{1+4a})/2$. Pour ce faire, on étudie la croissance de la suite :

$$x_m \leq x_{m+1} \Leftrightarrow x_m \leq \sqrt{a+x_m} \Leftrightarrow x_m^2 - x_m - a \leq 0 \Leftrightarrow x_m \leq \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

En outre,

$$x_{m+1} \leq \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \Leftrightarrow a + x_m \leq \frac{1+2\sqrt{1+4a}+1+4a}{4} \Leftrightarrow x_m \leq \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Au total,
- si $x_0 \leq (1+\sqrt{1+4a})/2$, alors la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $(1+\sqrt{1+4a})/2$, elle converge donc, nécessairement vers ce réel ;
- si $x_0 \geq (1+\sqrt{1+4a})/2$, on montre de manière similaire que la suite est décroissante et minorée par $(1+\sqrt{1+4a})/2$, elle converge donc également vers $(1+\sqrt{1+4a})/2$.

On conclut que dans tous les cas la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $(1+\sqrt{1+4a})/2$.

(c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait égale à la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$, avec $x_0 = \sqrt{2}$ et $a = 2$. Par le point précédent, elle converge dès lors vers $(1+\sqrt{1+4a})/2 = 2$.