Activités préparatoires 2016 - Algèbre (Partie 2)

Anne Lacroix

Table des matières

Equations fractionnaires

Une *équation fractionnaire* en l'inconnue (réelle) x est une équation du type

$$\frac{N(x)}{D(x)} = 0$$

où N et D sont des polynômes.

Ce qui change : CONDITIONS D'EXISTENCE

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 2$$

Inéquations fractionnaires

Méthode de résolution

1. Conditions d'existence
2. Soustraire le membre de droite dans les deux membres pour se ramener à la forme

$$\frac{N(x)}{D(x)} \leq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{N(x)}{D(x)} \geq 0$$

3. Mise au même dénominateur
   ATTENTION ne JAMAIS supprimer le dénominateur
4. Recherche des racines
5. Tableau de signes
6. Solution

Inéquations fractionnaires

Rappels utiles pour les tableaux de signes

L'expression P^n est

- de même signe que P si n est impair
- toujours positive (ou nulle) si n est pair

Signe d'un polynôme du premier degré

		$-b/a$	
$ax+b$	Signe opposé de a	0	Signe de a

Inéquations fractionnaires

Rappels utiles pour les tableaux de signes

Signe d'un polynôme du second degré

Si $\rho < 0$

		x_1		x_2	
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe opposé de a	0	Signe de a

Si $\rho = 0$

		$x_1 = x_2$	
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe de a

Si $\rho < 0$

$ax^2 + bx + c$	Signe de a

Inéquations fractionnaires

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{(3x+1)(2x-5)^2(x^2-4x+3)^5}{2x^2-3x+5} \geq 0$$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{x+2}{x+3} \leq \frac{x+4}{x+5}$$

Systèmes linéaires

Une *équation linéaire* en les n inconnues (réelles ou complexes) x_1, ..., x_n est une équation du type

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$$

où les a_1, ..., a_n, b sont des nombres (réels ou complexes) donnés.

Les nombres a_1, ..., a_n sont les *coefficients* et b est le *terme indépendant*.

Systèmes linéaires

Un *système de p équations linéaires à n inconnues* (réelles ou complexes) est un système du type

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{array} \right.$$

où les a_{ij} $(i = 1, ..., p \; ; \; j = 1, ...n)$ et les b_1, ..., b_p sont des nombres (réels ou complexes) donnés.

Les a_{ij} sont les *coefficients* et les b_i sont les *termes indépendants*.

Systèmes linéaires

Un n-uple de nombres $(x_1, ..., x_n)$ vérifiant simultanément les p équations est appelé *solution* du système.

Résoudre un système $=$ déterminer l'ensemble de ses solutions.

Un système est dit *compatible* s'il possède au moins une solution. Un système compatible peut posséder une seule solution ou une infinité de solutions.

Deux systèmes sont *équivalents* s'ils possèdent le même ensemble de solutions.

Systèmes linéaires

Interprétation géométrique

Dans $\mathbb{R}^2$, toute équation du premier degré à 2 inconnues

$$ax + by + c = 0$$

est l'équation d'une droite, à la condition que $(a, b) \neq (0, 0)$.

On peut donc interpréter un système d'équations linéaires à 2 inconnues, dont les coefficients dans la même équation ne sont pas simultanément nuls, comme un ensemble de droites du plan.

Les solutions de ce système sont alors les points communs à toutes les droites du système.

Systèmes linéaires

Interprétation géométrique

Dans $\mathbb{R}^3$, toute équation du premier degré à 3 inconnues

$$ax + by + cz + d = 0$$

est l'équation d'un plan, à la condition que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

On peut donc interpréter un système d'équations linéaires à 3 inconnues, dont les coefficients dans la même équation ne sont pas simultanément nuls, comme un ensemble de plans de l'espace.

Les solutions de ce système sont alors les points communs à tous les plans du système.

Systèmes linéaires

Résolution par combinaison linéaire

En multipliant une équation entière par un même nombre, on se débrouille pour avoir le même coefficient devant x_i dans deux équations puis on soustrait ces 2 équations

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} -4x + 3y = 23 \\ x - y = -7 \end{cases}$$

Systèmes linéaires

Résolution par substitution

On isole une inconnue dans une équation puis on la remplace par sa valeur dans les autres équations

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{l} -4x + 3y = 23 \\ x - y = -7 \end{array}\right.$$