1, 2, 3...Sciences

Année académique 2016-2017

Exercices de mathématiques
Révisions en vue de l'examen du 9/01/2017 : correction

Version 1er décembre 2016

$\boxed{\text{Exercices divers}}$

1. **Résoudre les équations et inéquations suivantes (pour (c) et (d), on suppose que $x \in [\pi, 3\pi]$)**
   (a) $3x|x-2| = x-2$
   (b) $\frac{|1-x|}{x^2-1} \geq x-1$
   (c) $\cos(3x) - \sin(x) = 0$
   (d) $\sin(2x) \leq \sin(x)$

   Solution. Les ensembles S de solutions sont les suivants :
   (a) $S = \{-1/3,\ 2\}$ (b) $S =]-\infty, -1[\cup \{0\} \cup]1, \sqrt{2}]$
   (c) $S = \left\{\frac{9\pi}{8},\ \frac{13\pi}{8},\ \frac{7\pi}{4},\ \frac{17\pi}{8},\ \frac{21\pi}{8},\ \frac{11\pi}{4}\right\}$ (d) $S = \{\pi\} \cup \left[\frac{5\pi}{3},\ 2\pi\right] \cup \left[\frac{7\pi}{3},\ 3\pi\right]$

2. **Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes :**
   (a) $\cos(\ln(e^{-2\pi/3})) + \sin(\mathrm{tg}(3\pi/4))$
   (b) $\arcsin(1 - \cos(7\pi/6)) + \mathrm{arcos}(\cos(4\pi/3))$

   Solution. La première expression est définie et vaut $-\frac{1}{2} - \sin(1)$; la deuxième n'est pas définie.

3. **Dans un repère orthonormé, on donne les points A, B, C dont les coordonnées sont $A(-1,0,3)$, $B(1,2,-1)$ et $C(4,1,2)$. Calculer**
   (a) $3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$
   (b) **les composantes de $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}$**
   (c) **les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{BC}$.**

   Solution. Le produit scalaire vaut -24 et le produit vectoriel est le vecteur de composantes $(2,\ -18,\ -8)$.
   La projection orthogonale de $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{BC}$ est le vecteur de composantes $\left(\frac{33}{19}, -\frac{11}{19}, \frac{33}{19}\right)$

4. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**
   (a) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{\ln(2x+3)}{x+1}$
   (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{|1+x|}{\sqrt{1-x^2}}$
   (c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{arcotg}\left(\frac{x^3-1}{-2x}\right)$
   (d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\exp(-3x)-1}{2x}$
   (e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\ln(-5x-1) - \ln|ex|)$
   (f) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 1}$

   Solution. Les limites peuvent toutes être envisagées sauf la limite (b). Elles valent respectivement 2, π^-, $-\frac{3}{2}$, $\ln(5) - 1$ et -6.

5. **Où la fonction $x \mapsto \arccos(\sqrt{1-x^2})$ est-elle définie ? dérivable ? En déterminer la dérivée première.**

Solution. La fonction est définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,0[\, \cup\,]0,1[$; sa dérivée première est la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]-1,0[\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

6. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.**
   (a) $\int_{-2}^{-1} \frac{\ln(-3x)}{x} dx$
   (b) $\int_{-\infty}^{0} xe^{3x} dx$
   (c) $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{2-x} dx$
   (d) $\int_{-4}^{4} \sqrt{x^2} dx$
   (e) $\int_{4}^{5} \frac{2}{x(x^2-6x+9)} dx$

Solution. Toutes les fonctions sont intégrables sur l'intervalle considéré sauf la fonction $x \mapsto \frac{1}{2-x}$ qui n'est pas intégrable en $-\infty$. Les intégrales valent respectivement

(a) $-\dfrac{1}{2}\ln 18. \ln 2$ (b) $-\dfrac{1}{9}$ (d) 16 (e) $\dfrac{2}{9}(\ln 5 - 3\ln 2) + \dfrac{1}{3}$

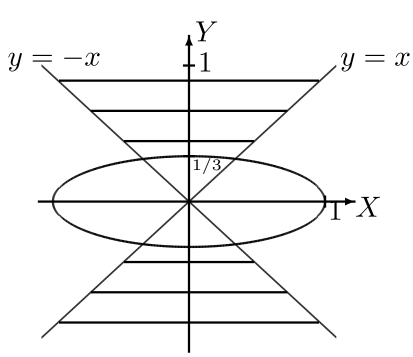
7. **Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.**
   (a) $x^2 + 2 = -ix$
   (b) $27 + x^3 = 0$

Solution. Les ensembles S de solutions sont les suivants :

(a) $S = \{-2i,\ i\}$ (b) $S = \{-3,\ \dfrac{3(1-i\sqrt{3})}{2},\ \dfrac{3(1+i\sqrt{3})}{2}\}$

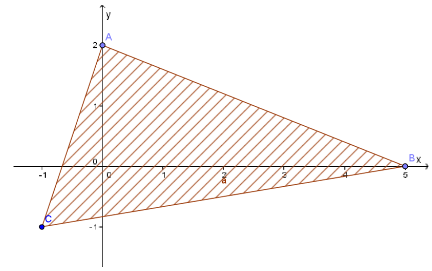
8. **Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \geq x^2 \geq 1 - 9y^2\}.$$



Les points de l'ensemble sont ceux de la partie hachurée.
Les points des bords sont compris dans l'ensemble.

9. **Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré suivant**



(1) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
(2) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.

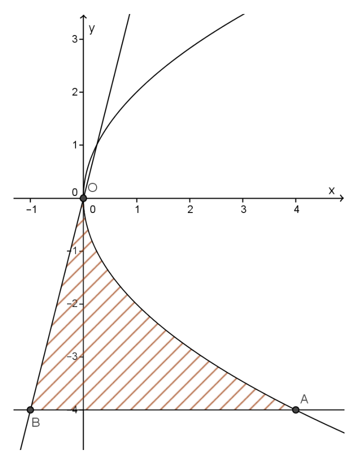
Solution.
a) Les trois sommets de ce triangle sont les points A, B, C de coordonnées respectives $(0,2),(5,0)$ et $(-1,-1)$. Les droites qui délimitent le triangle ont pour équation $AB \equiv 2x+5y-10=0$, $AC \equiv 3x-y+2=0$, $BC \equiv x-6y-5=0$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-1,0],\ y\in\left[\frac{x-5}{6}, 3x+2\right]\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,5],\ y\in\left[\frac{x-5}{6}, \frac{-2x+10}{5}\right]\right\}.$$

b) L'ensemble fermé hachuré est également décrit analytiquement par

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[-1,0],\ x\in\left[\frac{y-2}{3}, 6y+5\right]\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[0,2],\ x\in\left[\frac{y-2}{3}, \frac{-5y+10}{2}\right]\right\}.$$

10. **Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré suivant**



(1) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
(2) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.

Solution.
a) Les trois points A, B, O sont respectivement de coordonnées $(4,-4),(-1,-4)$ et $(0,0)$. Les droites qui délimitent l'ensemble ont pour équation $AB \equiv y=-4$, $BO \equiv 4x-y=0$. La parabole a pour équation $y^2=4x$; dès lors, la courbe délimitant l'ensemble a pour équation $y=-2\sqrt{x}$.
L'ensemble fermé hachuré est donc décrit analytiquement par

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-1,0],\ y\in[-4,4x]\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,4],\ y\in[-4,-2\sqrt{x}]\}.$$

b) L'ensemble fermé hachuré est également décrit analytiquement par

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[-4,0],\ x\in\left[\frac{y}{4}, \frac{y^2}{4}\right]\right\}.$$

11. **Déterminer l'ensemble des solutions dse équations différentielles suivantes (f est la fonction inconnue)**

$$a)\ D^2f(x)+f(x)=e^{ix} \qquad b)\ 9D^2f(x)+6Df(x)+f(x)=\sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

Solution. a) L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2f(x)+f(x)=0$; le polynôme caractéristique est $z\mapsto z^2+1$ et ses zéros sont i et $-i$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1e^{ix}+c_2e^{-ix},\ x\in\mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Le second membre, fonction continue sur $\mathbb{R}$, est une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha=i$, solution simple de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x)=Ax\,e^{ix},\ x\in\mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer. Comme

$$Df_P(x)=A(1+ix)e^{ix} \text{ et } D^2f_P(x)=A(2i-x)e^{ix},$$

en remplaçant dans l'équation, on a

$$A(2i-x)e^{ix}+Ax\,e^{ix}=e^{ix}$$

et, en simplifiant, on obtient $A=-i/2$.
Ainsi, $f_P(x)=\dfrac{-i}{2}x\,e^{ix},\ x\in\mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_2e^{-ix}+\left(c_1-\frac{i}{2}x\right)e^{ix},\ x\in\mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
b) Les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$(c_1x+c_2)e^{-\frac{x}{3}}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{3}\right),\ x\in\mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Problèmes élémentaires

1. **La distance de freinage (en mètres) d'une voiture roulant à v km/h sur sol sec est donnée par**
   (a) $\left(\frac{v}{10}\right)^2+\frac{v}{2}$ **si cette voiture est équipée de freins normaux**
   (b) v **si cette voiture est équipée de freins ABS spéciaux.**

   Déterminer les vitesses pour lesquelles la voiture équipée de freins ABS est plus performante quant à la distance de freinage.

   Solution. La voiture équipée de freins ABS est plus performante pour des vitesses strictement supérieures à 50 km/h.

2. **Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il obtient 53,75 points comme cote finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?**

   Solution. L'étudiant a fourni 63 réponses correctes.

Maths en sciences

1. **La pression de la vapeur d'eau saturée dépend de la température suivant une loi de la forme $p = aT^2 + bT + c$ (a, b, c étant réels). Nous disposons des valeurs suivantes :**

T (C)	0	10	20
p (Torr)	4.6	9.2	17.5

   Calculer les coefficients a, b et c.

   Solution. Les coefficients a, b et c valent respectivement $0,0185$, $0,275$ et $4,6$.

2. **Il a été prouvé expérimentalement que le radium se désintègre au cours du temps en obéissant à la formule $m(t) = m_0 e^{-0,000436t}$, où m_0 représente la masse initiale du radium et $m(t)$ sa masse après t années. Calculer la "période de désintégration" du radium, c'est-à-dire le laps de temps pendant lequel se désintègre la moitié de la masse initiale (N.B. : $\ln 2 \approx 0,7$).**

   Solution. Comme $\ln 2 \approx 0,7$, la période de désintégration du radium vaut $\dfrac{\ln(2)\ .\ 10^4}{4,36} \approx 1606$ années.

3. **Un point matériel se déplace à la vitesse $v = 2t + 4$ cm/s. Calculer la distance parcourue après les 10 premières secondes si le temps t est exprimé en secondes.**

   Solution. Après les 10 premières secondes, le point a parcouru 140 cm.

4. **En physique, le travail exercé par une force F pour déplacer un point matériel d'un point P_1, situé à une distance d_1 de son point d'application, à un point P_2, situé à une distance d_2 de son point d'application, est donné par l'intégrale suivante :**

$$W = \int_{d_1}^{d_2} F(x)dx.$$

   Fort de ce constat, soient deux charges électrique $e_1 = 1$ et $e_2 = e$, distantes entre elles de x. La loi de Coulomb affirme que la charge e agit sur la charge unité avec une force de valeur absolue égale à $\frac{e}{x^2}$. Calculer le travail W de cette force lorsque la charge unité se déplace d'un point P_1 situé à la distance r de cette charge e jusqu'à un autre point P_2 où l'éloignement devient égal à R. En déduire le potentiel de la charge e au point P_1 (sachant que le potentiel est égal à la limite du travail W lorsque R tend vers $+\infty$).

Solution. Le travail de la force pour le déplacement considéré de la charge unité vaut $\dfrac{(R-r)e}{Rr}$.
Le potentiel de la charge e au point P_1 vaut e/r.

5. **Soit un ressort à boudin qui s'allonge de 1 mm pour un effort de traction de $30\,N$. Calculer le travail qu'il faut développer pour allonger le ressort de $20\,mm$, sachant que la force de traction est à chaque instant proportionnelle au déplacement.**

   Solution. Le travail à développer pour allonger le ressort de $20\,mm$ vaut $6\,J$.

QCM

1. Le carré d'un nombre complexe est toujours
   (a) un nombre positif
   (b) un nombre négatif
   (c) un nombre imaginaire pur
   ♣ aucune réponse correcte
2. La partie réelle du produit de deux nombres complexes est toujours égale
   (a) au produit des parties réelles de ces nombres
   (b) à la somme des parties réelles de ces nombres
   (c) à la somme de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre
   (d) au produit de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre
   ♣ aucune réponse correcte
3. La valeur absolue de la somme de deux réels est toujours
   (a) inférieure ou égale à la différence entre les valeurs absolues de ces réels
   ♣ inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ces réels
   (b) supérieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ces réels
   (c) supérieure ou égale à la moitié du produit de ces réels
   (d) aucune réponse correcte
4. Si f est définie sur $\mathbb{R}$, le graphique de $F(x) = f(-x),\ x \in \mathbb{R}$ est
   (a) le symétrique du graphique de f par rapport à la première bissectrice
   (b) le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe X
   ♣ le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe Y
   (c) le symétrique du graphique de f par rapport à l'origine
   (d) aucune réponse correcte
5. L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x|^3 < |x|^2$ est l'ensemble
   (a) $[-1, 1[$
   (b) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$
   ♣ $]-1, 1[\setminus\{0\}$
   (c) $]-\infty, -1[$

(d) aucune réponse correcte

6. Dans le plan muni d'un repère, une droite a toujours une équation cartésienne du type $y = mx + p$

   (a) vrai

   ♣ faux

7. Le cube d'un réel non nul et de son opposé sont toujours égaux

   (a) vrai

   ♣ faux

8. Etant donné deux vecteurs non nuls, tout autre vecteur du plan peut se décomposer de manière unique comme combinaison linéaire de ceux-ci.

   (a) vrai

   ♣ faux

9. Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante

   (a) vrai

   ♣ faux

10. Le domaine de définition de la fonction donnée par $\cos(\cos x)$ est l'intervalle [-1,1]

    (a) vrai

    ♣ faux