Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématique : corrigé du test 1

Version 6 octobre 2016

Corrigé du test 1 du 10-10-2016

1. **Résoudre l'inéquation suivante (x est une inconnue réelle) :** $\dfrac{1}{|x-x^2|} \leq \dfrac{1}{x}$

   Solution. L'inéquation est définie si $x - x^2 \neq 0$ et $x \neq 0$ c'est-à-dire pour tout réel différent de 0 et 1.
   Comme $|x-x^2| = |x|\,|1-x| > 0$, on peut multiplier les 2 membres par cette expression sans changer le sens de l'inégalité ; l'inéquation donnée est donc équivalente à $1 \leq \dfrac{|x|\,|1-x|}{x}$.
   • Si $x < 0$, l'inéquation n'a pas de solution car son premier membre qui est positif n'est jamais inférieur au second négatif.
   • Si $0 < x < 1$, en simplifiant par x, l'inéquation est équivanlente à $1 \leq 1 - x \Leftrightarrow x \leq 0$ donc n'a pas de solution dans $]0, 1[$.
   • Si $x > 1$, l'inéquation est équivanlente à $1 \leq x - 1 \Leftrightarrow x \geq 2$.
   Dès lors, l'ensemble de solutions de l'inéquation est $S = [2, +\infty[$.

   Autre méthode de résolution : $\dfrac{1}{|x-x^2|} \leq \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{|x-x^2|} - \dfrac{1}{x} \leq 0$
   Comme $x - x^2$ est positif si $x \in]0, 1[$ et négatif si $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, on a
   • si $x \in]0, 1[$, l'inéquation est équivalente à $\dfrac{1}{x(1-x)} - \dfrac{1-x}{x(1-x)} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x(1-x)} \leq 0 \Leftrightarrow 1 < x$; elle n'a donc pas de solution dans l'intervalle considéré.
   • si $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, l'inéquation est équivalente à $\dfrac{1}{x(x-1)} - \dfrac{x-1}{x(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-x}{x(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x$.
   Dès lors, l'ensemble de solutions de l'inéquation est $S = [2, +\infty[$.

2. **Résoudre dans $[-2\pi, 0]$ (x est une inconnue réelle) :** $\sin(x)\cos(x) - \dfrac{1}{2} = 0$

   Solution. En multipliant les 2 membres par 2, on a $2\sin(x)\cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 1$ $\Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\,(k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.
   Dès lors, les solutions dans $[-2\pi, 0]$ sont $-\dfrac{7\pi}{4}, -\dfrac{3\pi}{4}$.

Corrigé du test 1 du 12-10-2015

1. **Résoudre l'équation suivante en simplifiant au maximum (x est une inconnue réelle) :** $|x - x^2| = |x + 2|$

   Solution. L'équation donnée est équivalente à

   $$(x - x^2 = x + 2 \text{ ou } x - x^2 = -x - 2) \Leftrightarrow (x^2 + 2 = 0 \text{ ou } x^2 - 2x - 2 = 0).$$

   La première équation n'a pas de solution réelle. Pour résoudre la deuxième, calculons le discriminant. On obtient $\Delta = 4 - 4.(-2).1 = 12$. Dès lors, les solutions de l'équation donnée sont

   $$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$$

   L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right\}$.

2. **Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ (x est une inconnue réelle) :** $\cos(2x) = \cos(x) - 1$

   Solution. Comme $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, l'équation s'écrit

   $$2\cos^2(x) - \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x)(2\cos(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = 1/2.$$

   Dès lors, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$ et les solutions dans $[-\pi, \pi]$ sont $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.