Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématique : corrigé du test 2

Version 25 octobre 2016

Corrigé du test 2 du 26-10-2016

1. **a) Donner la propriété faisant intervenir une somme et un produit pour l'exponentielle.**

   Solution. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a exp(x + y) = exp(x) exp(y), ce qui s'écrit $e^{x+y} = e^x e^y$.

   b) La fraction $\frac{2+x}{x^2}$ est-elle rationnelle simple ? Justifier.

   Solution. La fraction $\frac{2+x}{x^2}$ est une fraction rationnelle puisque quotient de deux polynômes, mais elle n'est pas simple car elle n'est pas du type

$$\frac{r}{(x+s)^\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{dx+e}{(x^2+bx+c)^\beta}$$

   avec $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0, r, s, d, e, b, c \in \mathbb{R}$ et $b^2 - 4c < 0$.
   (On aurait dû, par exemple, avoir un réel au numérateur.)

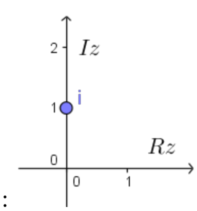
2. **Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante et représenter les solutions dans le plan muni d'un repère orthonormé ("X = axe réel" et "Y = axe imaginaire").**

$$z^2 - 2iz = 1$$

   Solution. L'équation donnée est équivalente à

$$z^2 - 2iz - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-i)^2 = 0 \Leftrightarrow z = i.$$

   L'ensemble des solutions est donc $S = \{i\}$ et on a la représentation suivante :



Corrigé du test 2 du 27-10-2016

1. **a) Définir "fraction rationnelle simple".**

   Solution. Une fraction rationnelle est une fonction définie comme étant le quotient de deux polynômes. Elle est simple si elle est du type

$$\frac{r}{(x+s)^\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{dx+e}{(x^2+bx+c)^\beta}$$

   avec $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0, r, s, d, e, b, c \in \mathbb{R}$ et $b^2 - 4c < 0$..

   b) Pour quelles valeurs de x l'expression $\arccos(\cos x))$ est-elle définie ? Peut-on dès lors calculer $\arccos\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$? Si oui, que vaut-elle ? Justifier.

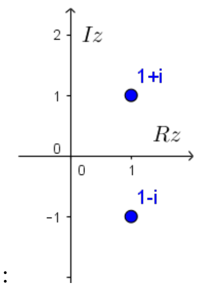
   Solution. La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$ et son image est $[-1, 1]$; d'autre part, la fonction arcos est définie sur $[-1, 1]$; l'expression donnée est donc définie pour tous $x \in \mathbb{R}$.
   Dès lors $\arccos\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$ est définie.
   Puisque $\arccos(\cos x)) = x, \ \forall x \in [0, \pi]$ et que $\cos(-\pi/2) = \cos(\pi/2)$, on a $\arccos\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$.

2. **Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante et représenter les solutions dans le plan muni d'un repère orthonormé ("X = axe réel" et "Y = axe imaginaire").**

$$z^2 = 2z - 2$$

Solution. L'équation donnée est équivalente à $z^2 - 2z + 2 = 0$
Comme le disciminant vaut $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$, on a $z = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$.

L'ensemble des solutions est donc $S = \{1 \pm i\}$ et on a la représentation suivante :



Corrigé du test 2 du 28-10-2016

1. **a) Définir "fraction rationnelle propre".**

Solution. Une fraction rationnelle est une fonction définie comme étant le quotient de deux polynômes. Une fraction rationnelle F

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : D(x) = 0\}$$

est dite propre lorsque le degré du numérateur N est strictement inférieur à celui du dénominateur D et que ces deux polynômes $N(x)$ et $D(x),\ x \in \mathbb{R}$, n'ont pas de zéro commun.

b) Pour quelles valeurs de x l'expression $\cos(\arccos(x))$ est-elle définie ? Peut-on dès lors calculer $\cos(\arccos(\frac{\pi}{2}))$? Si oui, que vaut-elle ? Justifier.

Solution. La fonction arcos est définie sur $[-1, 1]$ et son image est $[0, \pi]$; d'autre part, la fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$. L'expression donnée est donc définie sur $[-1, 1]$.
Dès lors $\cos(\arccos(\frac{\pi}{2}))$ n'est pas définie puisque $\frac{\pi}{2} \notin [-1, 1]$.

2. **On donne la fonction $f : x \mapsto g\left(\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$ et la fonction g définie sur $]0, +\infty[$.**
a) Déterminer le domaine de définition de f.
b) Si elle existe, que vaut l'image de -2 par f sachant que $g(\frac{1}{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ et $g(\frac{1}{2}) = 2$?

Solution. La fonction f est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{x+1}{2} \leq 1 \ et\ \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) > 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 1 \ et\ \frac{x+1}{2} > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 1 \ et\ x > -1\} =]-1, 1]$$

Comme $-2 \notin]-1, 1]$, l'image de -2 n'existe pas.

Corrigé du test 2 du 4-11-2016

1. **a) Donner la propriété faisant intervenir une somme et un produit pour le logarithme népérien.**

   Solution. Pour tous $x, y \in]0, +\infty[$, on a $\ln(\mathrm{xy}) = \ln(\mathrm{x}) + \ln(\mathrm{y})$.

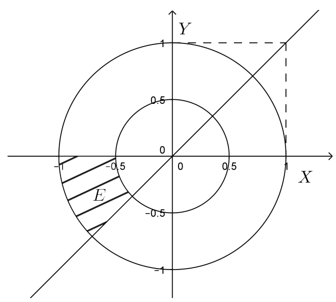
   b) La fraction $\frac{2+x}{x^2}$ est-elle rationnelle propre ? Justifier.
   Solution. La fraction $\frac{2+x}{x^2}$ est une fraction rationnelle puisque que quotient de deux polynômes ; elle est propre car les numérateur et dénominateur n'ont pas de zéro commun et le degré du numérateur (égal à 1) est strictement inférieur au degré du dénominateur (égal à 2).

2. **a) Représenter dans un repère orthonormé en le hachurant l'ensemble E dont une description analytique est la suivante**

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq y \leq 0\}$$

   b) Décrire l'ensemble E à l'aide des coordonnées polaires.

Solution. a)



E est la partie hachurée du plan, bords compris.

b) $E = \{(r, \theta) : r \in [\frac{1}{2}, 1], \theta \in [\pi, \frac{5\pi}{4}]\}$.